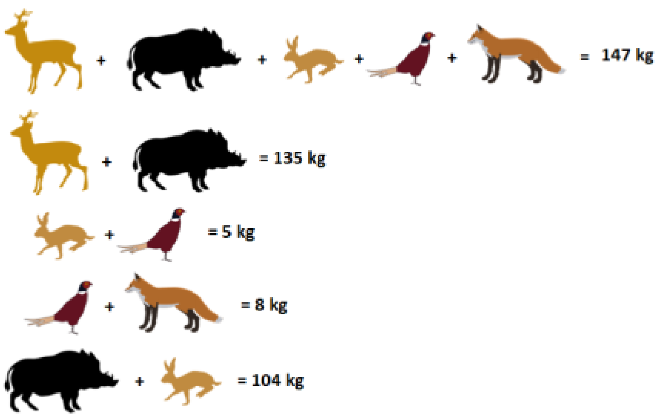
ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. ožujka 2023.

4. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

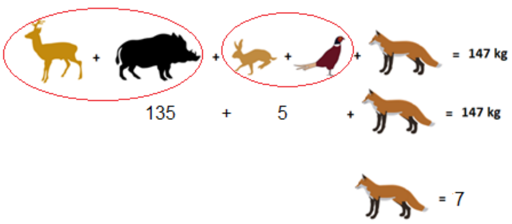
1.



Kolika je masa pojedine životinje?

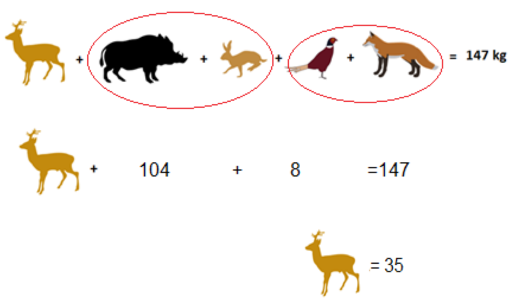
Koliko je kilograma  ?

Prvo rješenje.



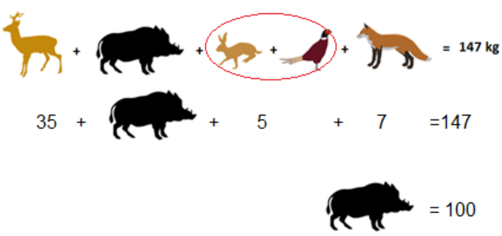
1 BOD

1 BOD



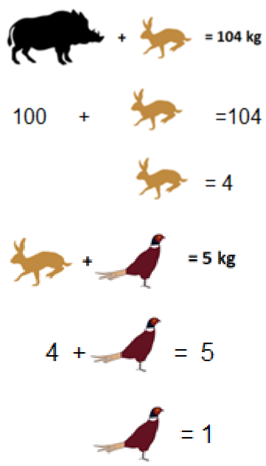
1 BOD

1 BOD



1 BOD

1 BOD



1 BOD

1 BOD

Lisica ima 7 kg, jelen 35 kg, vepar 100 kg, zeko 4 kg, a fazan 1 kg. 1 BOD

Napomena 1: Ako uz sliku (ili puno ime) svake životinje piše masa s istaknutom mjernom jedinicom (kg) ovaj bod je uključen i bez formalno pisanog odgovora.

= 35 + 4 + 7 = 46 kg.

Lisica, zeko i jelen zajedno imaju 46 kg. 1 BOD

Napomena 2: Ako je masa životinja napisana u slikovnom zapisu s istaknutom mjernom jedinicom (kg) ovaj bod je uključen i bez formalno pisanog odgovora.
……..….……………………………..……………..…………………..…..UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.
Označimo s j masu jelena, sa s masu svinje, sa z masu zeca, s p masu ptice i s l masu lisice u kilogramima.

Tada vrijedi:
$j+s+z+p+l=147,$

$j+s=135$

$z+p=5$

$p+l=8$

$s+z=104$

Uvrstimo:
$j+s+z+p+l=147$

$135+5+l=147$ 1 BOD

$l=147-135-5$

$l=7$ 1 BOD

$j+104+8=147$

$j=147-104-8$ 1 BOD

$j = 35$ 1 BOD

$35 + s + 5 + 7 = 147$ 1 BOD

$s = 147 - 35 - 5 - 7$

$s = 100$ 1 BOD

$100 + z = 104$

$z = 104 - 100$

$z = 4$ 1 BOD

$4 + p = 5$

$p = 1$ 1 BOD

Lisica ima 7 kg, jelen 35 kg, vepar 100 kg, zeko 4 kg, a fazan 1 kg. 1 BOD

$j + z + l = 35 + 4 + 7 = 46$ kg. Lisica, zeko i jelen zajedno imaju 46 kg. 1 BOD

……........………………………………………………………………...……..UKUPNO 10 BODOVA

2. Na koliko različitih načina možemo novčanicu od 50 eura razmijeniti (usitniti) koristeći se kovanicama od 2 eura te novčanicama od 5 i 10 eura? Napiši sve mogućnosti.

Prvo rješenje.
Da bi ukupni zbroj vrijednosti svih odabranih novčanica bio 50, među njima:

novčanica od 10 eura može biti 0, 1, 2, 3, 4 ili 5,

novčanica od 5 eura može biti 0, 2, 4, 6, 8 ili 10,

a kovanica od 2 eura može biti 0, 5, 10, 15, 20 ili 25. 2 BODA

Popisujemo trojke slažući prvo kovanice od 2, novčanice od 5 pa od 10 eura:

(0,0,5), (0,2,4), (0,4,3), (0,6,2), (0,8,1), (0,10,0)

(5,0,4), (5,2,3), (5,4,2), (5,6,1), (5,8,0)

(10,0,3), (10,2,2), (10,4,1), (10,6,0)

(15,0,2), (15,2,1), (15,4,0)

(20,0,1), (20,2,0)

(25,0,0) po tri trojke nose 1 BOD

Ima ukupno 21 različiti način. 1 BOD

Napomena: Ako učenik bez uvodnog pojašnjenja, koje nosi 2 BODA, popiše sve trojke i odgovori na pitanje (1 BOD) dobiva svih 10 BODOVA. Ako sustavno ispisuje trojke pa je izostavio jedno rješenje dobiva ukupno 8 BODOVA, a ako je izostavio 2 ili 3 rješenja dobiva ukupno 7 BODOVA.
……........…………………………………………………………………..…..UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.
U tablici ćemo prikazati sve mogućnosti:

Broj novčanica od 10 eura	Broj novčanica od 5 eura	Broj kovanica od 2 eura	
0	0	25	50
0	1		50 – 5 = 45
0	2	20	10 + 40 = 50
0	3		50 – 15 = 35
0	4	15	20 + 30 = 50
Zaključujemo da novčanica od 5 eura mora biti paran broj.			
0	6	10	30 + 20 = 50
0	8	5	40 + 10 = 50
0	10	0	50
1	0	20	10 + 40 = 50
1	2	15	10 + 10 + 30 = 50
1	4	10	10 + 20 + 20 = 50
1	6	5	10 + 30 + 10 = 50
1	8	0	10 + 40 = 50
2	0	15	20 + 30 = 50
2	2	10	20 + 10 + 20 = 50
2	4	5	20 + 20 + 10 = 50
2	6	0	20 + 30 = 50
3	0	10	30 + 20 = 50
3	2	5	30 + 10 + 10 = 50
3	4	0	30 + 20 = 50
4	0	5	40 + 10 = 50
4	2	0	40 + 10 = 50
5	0	0	50

9 BODOVA

50 eura možemo razmijeniti na 21 različiti način. 1 BOD

Napomena: Ako učenik popiše sve trojke i odgovori na pitanje (1 BOD) ostvaruje pravo na svih 10 BODOVA. Ako sustavno ispisuje trojke pa je izostavio jedno rješenje, dobiva ukupno 8 BODOVA, a ako je izostavio 2 ili 3 rješenja dobiva ukupno 7 BODOVA.
……………………………..…………………………………………………...….…. UKUPNO 10 BODOVA

3. Putnički vlak koji putuje od Osijeka do Zagreba svake 3 minute prijeđe 5 km. Drugi putnički vlak koji putuje iz Splita do Zagreba svake 2 minute prijeđe 3 km. Duljina puta vlaka koji putuje od Osijeka do Zagreba iznosi 275 km, a duljina puta vlaka koji putuje od Splita do Zagreba iznosi 405 km. U koliko sati mora krenuti vlak iz Splita, a u koliko onaj iz Osijeka ako oba trebaju biti u 17 h u Zagrebu, a pri tome znamo da će vlak iz Splita (zbog loših vremenskih uvjeta) svakih 30 minuta kasniti jednu minutu?

Rješenje.
Ako putnički vlak od Osijeka do Zagreba svake 3 minute prijeđe 5 km, tada za cijeli put treba:
275 : 5 · 3 = 55 · 3 = 165 min. 2 BODA

Budući da je 1h = 60 min, put od Osijeka do Zagreba traje 2 h i 45 min. 1 BOD

Ako putnički vlak od Splita do Zagreba svake 2 minute prijeđe 3 km, tada za cijeli put treba:

405 : 3 · 2 = 135 · 2 = 270 min. 2 BODA

Budući da je 1h = 60 min, put od Splita do Zagreba traje 4 h i 30 min. 1 BOD

Kako vlak iz Splita kasni 1 min svakih 30 min, on će ukupno kasniti:

4 · 2 + 1 = 8 + 1 = 9 min. 1 BOD

Ukupno putovanje vlaka iz Splita do Zagreba iznosi 4 h i 39 min. 1 BOD

Da bi vlak iz Osijeka došao u Zagreb u 17 h (a putuje 2 h i 45 min) mora krenuti iz Osijeka

u 14 h i 15 min. 1 BOD

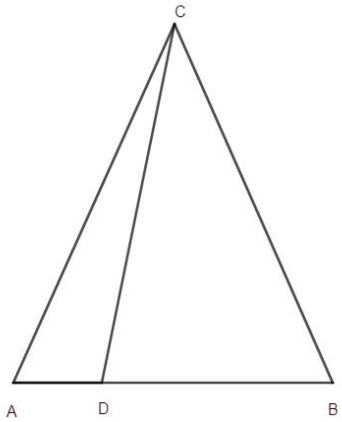
Da bi vlak iz Splita došao u Zagreb u 17 h (a putuje 4 h i 39 min) mora krenuti iz Splita

u 12 h i 21 min. 1 BOD

………………………..…………………………………………...….…. UKUPNO 10 BODOVA

4. Zadan je jednakokračni trokut ABC s osnovicom $\overline{AB}$ duljine 65 cm i krakovima $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ duljine 80 cm. Na osnovici $\overline{AB}$ odabrana je točka D takva da opseg trokuta ADC iznosi 173 cm, a opseg trokuta DBC iznosi 220 cm. Kolike su duljine dužina $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ i $\overline{DB}$?

Prvo rješenje.
Skica:



1 BOD

Izračunajmo opseg trokuta ABC.

$O_{ABC} = |AB| + |BC| + |CA|$

$O_{ABC} = 65 + 80 + 80$

$O_{ABC} = 225$ cm 1 BOD

Zbroj opsega trokuta ADC i DBC je veći od opsega trokuta ABC za dvostruku duljinu stranice $\overline{DC}$ ili, kraće, $O_{ADC} + O_{DBC} = O_{ABC} + 2 \cdot |DC|$ 3 BODA

pa vrijedi da je:

$2 \cdot |DC| = 173 + 220 - 225$ 1 BOD

$2 \cdot |DC| = 168$

$|DC| = 168 : 2$

$|DC| = 84$ cm 1 BOD

Duljinu dužine $\overline{AD}$ računamo iz opsega trokuta ADC.

$80 + |AD| + 84 = 173$ 1 BOD

$|AD| = 173 - (80 + 84)$

$|AD| = 9$ cm 1 BOD

Duljinu dužine $\overline{DB}$ računamo iz poznatih duljina dužina $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$.

$|DB| = 65 - 9$

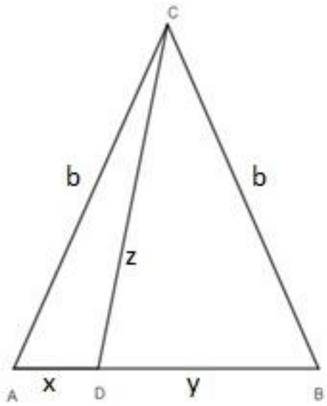
$|DB| = 56$ cm 1 BOD

…..….....…………………………………………………………...……..…..UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Označimo s b duljinu kraka trokuta ABC, s x duljinu dužine $\overline{AD}$, s y duljinu dužine $\overline{DB}$ i sa z duljinu dužine $\overline{CD}$. Iz navedenog slijedi da je osnovica $\overline{AB}$ duljine $x + y = 65$ cm.

Skica:



1 BOD

Izračunajmo opseg trokuta ABC.

$O_{ABC} = |AB| + |BC| + |CA|$

$O_{ABC} = 65 + 80 + 80$

$O_{ABC} = 225$ cm 1 BOD

Vrijedi da je

$O_{ABC} = x + y + 2b$ tj. $225 = x + y + 2b$

$O_{ADC} = x + b + z$ tj. $173 = x + b + z$

$O_{DBC} = y + b + z$ tj. $220 = y + b + z$ 1 BOD

Zbrojimo li opsege trokuta ADC i trokuta DBC dobivamo

$173 + 220 = \underbrace{x + y + 2b}_{225} + 2z$ 2 BODA

pa slijedi da je:

$2 \cdot z = 173 + 220 - 225$ 1 BOD

$2 \cdot z = 168$

$z = |DC| = 84$ cm 1 BOD

x računamo iz opsega trokuta ADC.

$80 + x + 84 = 173$ 1 BOD

$x = 173 - (80 + 84)$

$x = |AD| = 9$ cm 1 BOD

y računamo iz poznatih duljina dužina $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$.

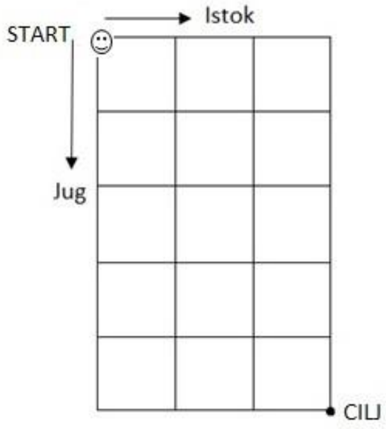
$y = 65 - 9$

$y = |DB| = 56$ cm 1 BOD

Napomena: Bodovi se ne oduzimaju za korištenje nepravilnih matematičkih oznaka ili nedostatak mjerne jedinice. Za 1 BOD na skici potrebno je imati pravilno označene vrhove svih navedenih trokuta (ne nužno u smjeru obrnuto kazaljkama na satu).

…………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

5. U računalnoj igrici Smješko mora doći od starta do cilja krećući se u smjeru istoka ili juga po stranicama zadane mreže. Mreža se sastoji od 15 jednakih kvadrata, a duljina stranice tog kvadrata iznosi jedan korak. (Npr. od starta do cilja može doći krećući se 3 koraka na istok pa 5 koraka na jug). Na koliko načina Smješko može doći do cilja? Obrazloži odgovor.

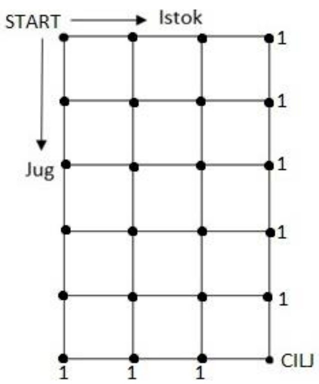


Prvo rješenje.

Kretanje za jedan korak u smjeru istoka kratko ćemo označavati s I, a kretanje za jedan korak u smjeru juga kratko ćemo označavati s J.

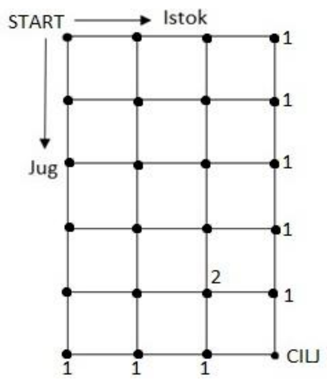
Označimo sve vrhove kvadrata s točkama. Iz svake točke Smješko može ići prema istoku ili jugu, a broj pored točke neka broji različite načine kretanja od tog mjesta do cilja.

Točkama iz kojih postoji samo 1 mogući put do cilja pridružit ćemo broj 1.



2 BODA

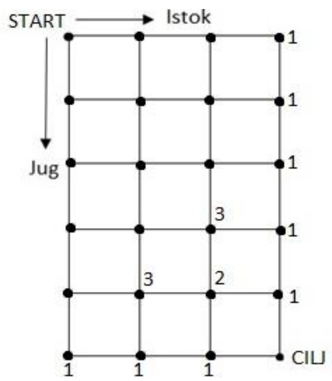
Promatrajmo kvadrat u donjem desnom uglu. Iz posljednje neoznačene točke do cilja možemo doći na 2 načina (IJ, JI). Stoga toj točki pridružujemo broj 2.



1 BOD

Iz točke iznad točke koji smo pridružili broj 2 možemo do cilja doći na 3 načina (IJJ, JIJ, JJI). Stoga njoj pridružujemo broj 3.

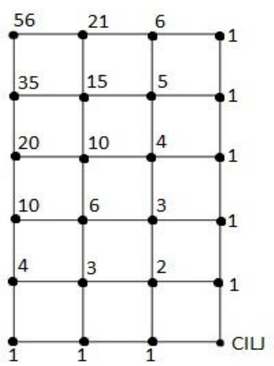
Isto vrijedi i za točku lijevo od točke kojoj smo pridružili broj 2. Iz nje također postoje 3 načina dolaska do cilja (IIJ, IJI,JII).



2 BODA

Zaključujemo da se za vrijednost pridružena svakoj pojedinoj točki dobije tako da zbrojimo vrijednosti točaka koje se nalaze jedno mjesto prema istoku i jedno mjesto prema jugu. 3 BODA

Popunjavanjem mreže imamo sljedeću sliku.



1 BOD

Dakle, mogući broj načina da Smješko dođe od starta do cilja je 56. 1 BOD

Napomena: Ako je učenik bez slike ispravno objasnio zaključak i točno rješenje ostvaruje pravo na 10 bodova, a ako učenik ima samo rješenje ostvaruje pravo na 1 bod. Djelomičnim zaključcima s točnim rješenjem može ostvariti najviše 8 bodova. Princip „slijedi grešku“ primjenjuje se samo uz točan zaključak (u slučaju krivog zbroja brojeva na susjednim vrhovima kvadrata).

…..…....……………………………………………………………………...…..UKUPNO 10 BODOVA

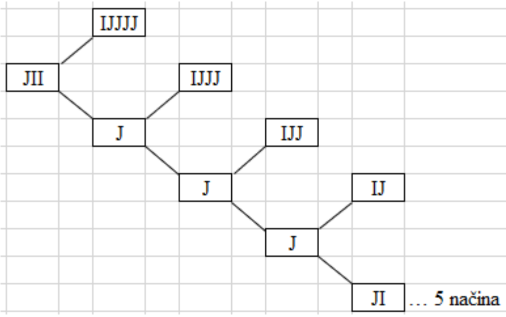
Drugo rješenje.

Kretanje za jedan korak u smjeru istoka kratko ćemo označavati s I, a kretanje za jedan korak u smjeru juga kratko ćemo označavati s J.

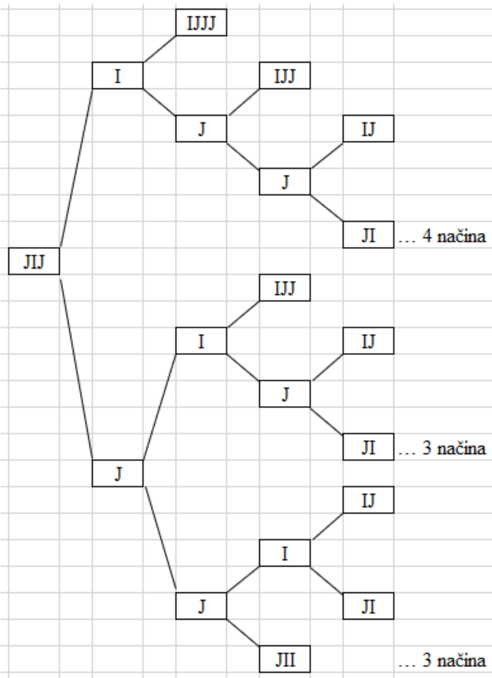
Svako kretanje od starta do cilja završava u 8 koraka. Razmotrimo posebno mogućnost prvog koraka prema jugu i prvog koraka prema istoku.

Ako krenemo <u>prvim korakom na jug</u>, drugi korak može biti na istok ili jug. I tako redom dok ne dođemo sasvim na istok (onda može samo na jug) ili sasvim na jug (onda može samo na istok).

Prikazat ćemo kretanje grafički tako da odaberemo prva tri koraka.



1 BOD



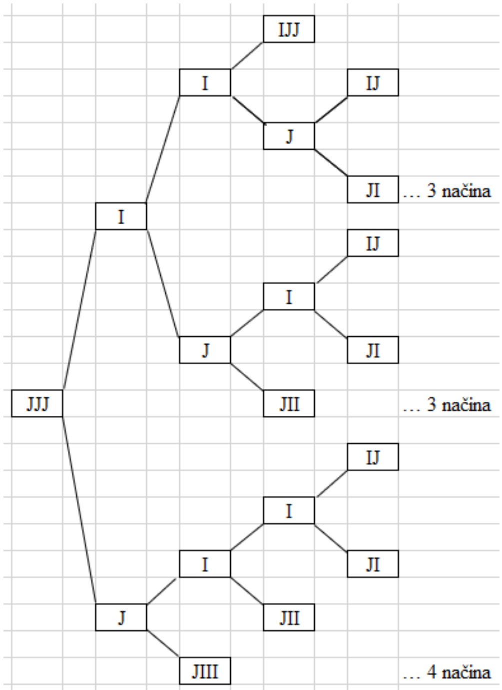
1 BOD

Ako krenemo korak prema jugu pa korak prema istoku (JI) do cilja možemo stići na 15 različitih načina.

Ako krenemo dva koraka prema jugu pa korak prema istoku (JJI) isto je kao da smo krenuli korak prema jugu, korak prema istoku pa opet prema jugu (JIJ) pa do cilja možemo stići na 10 različitih načina.

1 BOD

Ako krenemo tri koraka prema jugu (JJJ) imamo sljedećih 10 mogućnosti:



1 BOD

Time dolazimo do cilja na 35 različitih načina krenemo li prvim korakom prema jugu. 1 BOD

Ako krenemo <u>prvim korakom na istok</u>, drugi korak može biti na istok (II) ili jug (IJ).

Ako krenemo korak prema istoku pa korak prema jugu (IJ) isto je kao da smo krenuli korak prema jugu, korak prema istoku (JI) pa do cilja možemo stići na 15 različitih načina. 1 BOD

Ako krenemo dva koraka prema istoku pa korak prema jugu (IIJ) isto je kao da smo krenuli korak prema jugu pa dva koraka prema istoku (JII) pa do cilja možemo stići na 5 različitih načina. 1 BOD

Preostaje još samo kretanje 3 koraka prema istoku i 5 koraka prema jugu. 1 BOD

Time dolazimo do cilja na 21 različiti način krenemo li prvim korakom prema istoku. 1 BOD

Ukupno je 35 + 21 = 56 različitih mogućnosti kretanja Smješka od starta do cilja. 1 BOD

…..….....……………………………………………………………...……..…..UKUPNO 10 BODOVA

Treće rješenje.
Kretanje za jedan korak u smjeru istoka kratko ćemo označavati s I, a kretanje za jedan korak u smjeru juga kratko ćemo označavati s J.

Svako kretanje od starta do cilja završava u 8 koraka. Nabrojimo sve mogućnosti.

Ako krenemo prvim korakom na jug do cilja možemo doći na 35 različitih načina.

JII-I-JJJJ
JII-J-IJJJ
JII-J-JIJJ
JII-J-JJIJ
JII-J-JJJI (5)

JIJ-I-IJJJ
JIJ-I-JIJJ
JIJ-I-JJIJ
JIJ-I-JJJI

JIJ-J-IIJJ
JIJ-J-IJIJ
JIJ-J-IJJI
JIJ-J-JIIJ
JIJ-J-JIJI
JIJ-J-JJII (10)

JJI-I-IJJJ
JJI-I-JIJJ
JJI-I-JJIJ
JJI-I-JJJI

JJI-J-IIJJ
JJI-J-IJIJ
JJI-J-IJJI
JJI-J-JIIJ
JJI-J-JIJI
JJI-J-JJII (10)

JJJ-I-IIJJ
JJJ-I-IJIJ
JJJ-I-IJJI
JJJ-I-JIIJ
JJJ-I-JIJI
JJJ-I-JJII

JJJ-J-IIIJ
JJJ-J-IIJI
JJJ-J-IJII
JJJ-J-JIII (10)

Ako krenemo prvim korakom na istok do cilja možemo doći na 21 različiti način.

IJI-I-JJJJ
IJI-J-IJJJ
IJI-J-JIJJ
IJI-J-JJIJ
IJI-J-JJJI (5)

IJJ-I-IJJJ
IJJ-I-JIJJ
IJJ-I-JJIJ
IJJ-I-JJJI

IJJ-J-IIJJ
IJJ-J-IJIJ
IJJ-J-IJJI
IJJ-J-JIIJ
IJJ-J-JIJI
IJJ-J-JJII (10)

IIJ-I-JJJJ
IIJ-J-IJJJ
IIJ-J-JIJJ
IIJ-J-JJIJ
IIJ-J-JJJI (5)

III-J-JJJJ (1)

8 BODOVA
(**Napomena:** Po 7 kombinacija za 1 BOD.)

Ukupno je 35 + 21 = 56 različitih mogućnosti kretanja Smješka od starta do cilja. 2 BODA
……………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

Četvrto rješenje.
Kretanje za jedan korak u smjeru istoka kratko ćemo označavati s I, a kretanje za jedan korak u smjeru juga kratko ćemo označavati s J.

Svako kretanje od starta do cilja završava u 8 koraka.
Od toga je tri koraka na istok, a pet na jug.

Svaki takav put ćemo zapisati kao riječ od tri slova I i pet slova J.
Ako odredimo na kojim mjestima su slova I, onda su i slova J određena. 2 BODA

Za jedno slovo I možemo odabrati jedno od 8 mjesta. 1 BOD

Za drugo slovo I možemo odabrati jedno od preostalih 7 mjesta. 1 BOD

Za treće slovo I možemo odabrati jedno od preostalih 6 mjesta. 1 BOD

To daje ukupno $8 \cdot 7 \cdot 6$ izbora. 1 BOD

Uočimo da smo tako previše puta brojali iste riječi.

Na primjer riječ JIJJIJI ima slovo I na 2., 5. i 7. mjestu, ali tu smo riječ mogli dobiti na šest načina ovisno o tome kojim redom smo upisivali slova I na ta mjesta (257, 275, 527, 572, 725, 752). 2 BODA

Svaka riječ se dobiva na 6 načina, pa je zato broj različitih riječi
$(8 \cdot 7 \cdot 6) : 6 = 8 \cdot 7 = 56$. 1 BOD

Ukupno je 56 različitih mogućnosti kretanja Smješka od starta do cilja. 1 BOD
……………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA