ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. ožujka 2023.

5. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Sva slova jednakosti $(a+b)\cdot(c+d)\cdot(e+f)=315$ treba zamijeniti različitim brojevima od 1 do 6 tako da jednakost bude točna. Na koliko načina je to moguće napraviti?

Rješenje.
Rastavimo broj 315 na proste faktore: $315 = 3\cdot3\cdot5\cdot7$ 1 BOD

Svaka od zagrada može biti najmanje 3 (=1+2), a najviše 11 (=5+6). 1 BOD
Zaključujemo da zagrade moraju biti brojevi 5, 7 i 9, nekim redom. 1 BOD

Umnožak $315 = 5\cdot7\cdot9$ možemo prikazati na 6 načina:

$5\cdot7\cdot9$, $5\cdot9\cdot7$, $9\cdot5\cdot7$, $9\cdot7\cdot5$, $7\cdot9\cdot5$, $7\cdot5\cdot9$ 2 BODA

Umnožak $5\cdot7\cdot9$ se može prikazati kao: (1+4)(2+5)(3+6) 1 BOD
ili kao: (2+3)(1+6)(4+5) 1 BOD

Pribrojnike u svakom od ta dva umnoška možemo prikazati na 8 načina.

Primjerice, za umnožak (1+4)(2+5)(3+6) to su sljedeće kombinacije:

(1+4)(2+5)(3+6)

(1+4)(2+5)(6+3)

(1+4)(5+2)(3+6)

(1+4)(5+2)(6+3)

(4+1)(2+5)(3+6)

(4+1)(2+5)(6+3)

(4+1)(5+2)(3+6)

(4+1)(5+2)(6+3),

a za umnožak (2+3)(1+6)(4+5) također imamo 8 mogućnosti. 2 BODA

Ukupno ima $6\cdot8 = 48$ načina za (1+4)(2+5)(3+6) i 48 načina za (2+3)(1+6)(4+5).
Zaključujemo da postoji ukupno 48 + 48 = 96 načina. 1 BOD
……......…………………………………………………………...….…..UKUPNO 10 BODOVA

2. U dvjema posudama je ukupno 80 litara vode. Ako se iz prve prelije $\frac{1}{8}$ ukupne količine vode u drugu posudu, onda će u drugoj posudi biti 4 puta više vode nego u prvoj posudi. Koliko je vode bilo u svakoj posudi prije prelijevanja?

Prvo rješenje.

$\frac{1}{8}$ ukupne količine vode je $80 : 8 = 10$ litara. 1 BOD

Iz uvjeta zadatka proizlazi da je nakon prelijevanja bilo ukupno 5 jednakih dijelova jer je u drugoj posudi 4 puta više nego u prvoj.

2 BODA

$80 : 5 = 16$ - U prvoj je posudi 16 l vode, 3 BODA
a u drugoj $16 \cdot 4 = 64$ l vode.
Prije prelijevanja u prvoj je bilo $16 + 10 = 26$ l vode, 2 BODA
a u drugoj $80 - 26 = 54$ l vode. 2 BODA
……....…………………………………………………………………….…..UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

$\frac{1}{8}$ ukupne količine vode je $80 : 8 = 10$ litara. 1 BOD

Neka je prije prelijevanja u prvoj posudi bilo x, a u drugoj y litara vode.

Vrijedi:
$x + y = 80$, 1 BOD
odnosno $y = 80 - x$

Ako se iz prve posude izlije 10 litara u drugu posudu, onda će u prvoj biti $x - 10$, a u drugoj $y + 10$ litara vode. 1 BOD

Znamo da će nakon prelijevanja u drugoj biti 4 puta više vode nego u prvoj posudi:
$y + 10 = 4 \cdot (x - 10)$ 2 BODA

Uvrstimo vrijednost za y:
$80 - x + 10 = 4 \cdot (x - 10)$ 1 BOD
$90 - x = 4x - 40$ 1 BOD
$5x = 90 + 40$
$5x = 130$ 1 BOD
$x = 26$ 1 BOD
$y = 80 - 26 = 54$ litara 1 BOD
………………………..……………………………………………...….… UKUPNO 10 BODOVA

3. Koliko ima brojeva manjih od 100 000 koji imaju točno pet djelitelja?

Rješenje.

Označimo s $D(n)$ skup svih djelitelja prirodnog broja n.

Ako je a prost broj i ako je $n = a \cdot a$, tada je $D(n) = \{1, a, n\}$, pa n ima 3 djelitelja.

…ako je $n = a \cdot a \cdot a$, tada je $D(n) = \{1, a, a \cdot a, n\}$, pa n ima 4 djelitelja.

…ako je $n = a \cdot a \cdot a \cdot a$, tada je $D(n) = \{1, a, a \cdot a, a \cdot a \cdot a, n\}$, pa n ima 5 djelitelja. 3 BODA

Ako su a i b prosti brojevi i ako je $n = a \cdot b$, tada je $D(n) = \{1,\ a,\ b,\ n\}$, pa n ima 4 djelitelja.
1 BOD

…ako je $n = a \cdot a \cdot b$, tada je $D(n) = \{1,\ a,\ b,\ a \cdot a,\ a \cdot b,\ n\}$, pa n ima 6 djelitelja,

i tako dalje, n će imati sve više djelitelja. 2 BODA

Zaključujemo da n mora biti jednak umnošku $a \cdot a \cdot a \cdot a$, gdje je a neki prost broj.

Budući da je $17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 17 = 83\,521 < 100\,000$, a $19 \cdot 19 \cdot 19 \cdot 19 = 130\,321 > 100\,000$, zaključujemo da a može biti 2, 3, 4, 7, 11, 13 ili 17. 3 BODA
(Po 1 BOD se dobiva za računanje umnožaka prostih brojeva 17 i 19, te 1 BOD za zaključak).

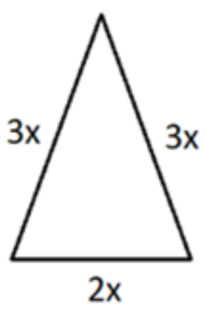
Dakle, traženih brojeva ima 7. 1 BOD
…………………………..……………………………………………...….…. UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Ukoliko učenik samo ispiše svih sedam brojeva bez ikakvih prethodnih objašnjenja može dobiti maksimalno četiri boda i ako još odgovori da je takvih brojeva ukupno sedam, dobiva peti bod.

4. Ivan izrađuje crvene, zelene, plave i žute zastavice oblika jednakokračnog trokuta. Svim zastavicama su osnovice jednake duljine. Crvenoj zastavici je krak dulji od osnovice za $\frac{1}{2}$ duljine te osnovice. Zelenoj zastavici je krak dulji od kraka crvene za $\frac{1}{3}$ njegove duljine. Plavoj zastavici je krak dulji od kraka zelene za $\frac{1}{4}$ njegove duljine, a žutoj je krak dulji od kraka plave za $\frac{1}{5}$ njegove duljine. Treba sašiti po 50 zastavica svake boje i sve ih treba obrubiti trakom srebrne boje. Koliko će se metara srebrne trake utrošiti ako se zna da za rub crvene zastavice treba 40 cm trake?

Prvo rješenje.

Krenimo od crvene zastavice čiji je opseg 40 cm.
Crvenoj zastavici je krak dulji od osnovice za $\frac{1}{2}$ duljine te osnovice.
Podijelimo li osnovicu na 2 dijela i svaki dio označimo s x, zaključujemo da je duljina osnovice 2x, duljina kraka 3x. 1 BOD



Opseg crvenog trokuta je $2x + 3x + 3x = 40$. 1 BOD
$8x = 40$
$x = 5$ 1 BOD
to znači da je duljina osnovice crvene zastavice $2 \cdot 5 = 10$ cm,
a duljina kraka crvene zastavice $3 \cdot 5 = 15$ cm. 1 BOD

Trećina od 15 je 5, pa je duljina kraka zelene zastavice $15 + 5 = 20$ cm. 1 BOD
Četvrtina od 20 je 5, pa je duljina kraka plave zastavice $20 + 5 = 25$ cm. 1 BOD
Petina od 25 je 5, pa je duljina kraka žute zastavice $25 + 5 = 30$ cm. 1 BOD

Svima zastavicama su jednake duljine osnovica.
Duljina srebrne trake za sve zastavice je:
$(10 + 2 \cdot 15 + 10 + 2 \cdot 20 + 10 + 2 \cdot 25 + 10 + 2 \cdot 30) \cdot 50 =$ 1 BOD
$= (40 + 30 + 40 + 50 + 60) \cdot 50$
$= 220 \cdot 50$
$= 11\,000$ cm 1 BOD
$= 110$ m. 1 BOD
Potrebno je 110 m srebrne trake za obrubljivanje.
……………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Krenimo
Označimo duljinu osnovica svih trokuta sa a.

Tada je krak crvenog trokuta $a + 0.5a = 1.5a$. 1 BOD

Krak zelenog je $1.5\,a + \frac{1}{3} \cdot 1.5\,a = 1.5\,a + 0.5\,a = 2a$. 1 BOD

Krak plavog je $2a + \frac{1}{4} \cdot 2a = 2a + 0.5a = 2.5a$. 1 BOD

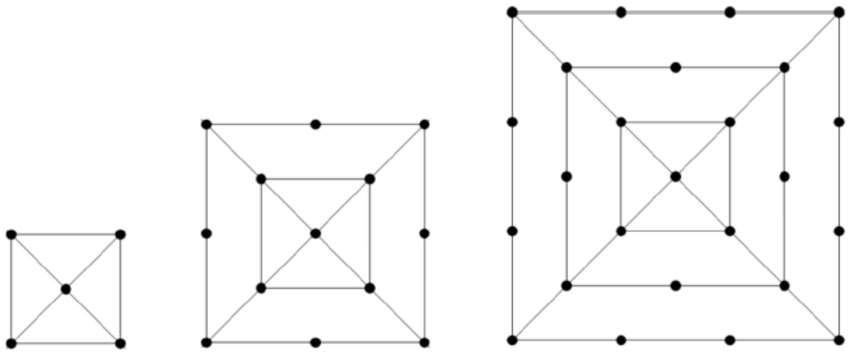
Krak žutog je $2.5\,a + \frac{1}{5} \cdot 2.5\,a = 2.5\,a + 0.5\,a = 3a$. 1 BOD

Iz opsega crvenog trokuta zaključujemo
$a + 1.5a + 1.5a = 40$ 1 BOD
$4a = 40$
$a = 10$ 1 BOD

Opseg plavog trokuta je $a + 2a + 2a = 5a$, zelenog $a + 2.5a + 2.5a = 6a$,
a žutog $a + 3a + 3a = 7a$. 1 BOD

Duljina srebrne trake koja je potrebna iznosi
$50 * (4a + 5a + 6a + 7a)$ 1 BOD
$= 50 * 22 * a = 110000$ cm 1 BOD
$= 110$ m 1 BOD
……………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

5. Na slici je prikazan niz likova. Svaki lik ima nekoliko istaknutih točaka, npr. prvi lik ima 5 istaknutih točaka, drugi lik ima 13 istaknutih točaka itd. Ako bi se niz takvih likova nastavio, koliko bi istaknutih točaka imao dvadesettreći lik u tom nizu?



Prvo rješenje.

Uočimo da svaki novi lik nastaje od prethodnog tako da damo neki broj istaknutih točaka koje formiraju vanjski kvadrat novog lika. 1 BOD

Na točku u središtu dodajemo 4 točke i dobivamo prvi lik, pa nakon toga dodajemo 8 točaka i dobivamo drugi lik, pa dodajemo 12 točaka i dobivamo treći lik. 1 BOD

U svakom koraku smo dodali 4 točke više jer se broj točaka na stranici vanjskog kvadrata povećava za jedan. 2 BODA

Tada je broj istaknutih točaka dvadesettrećeg lika u nizu:

$1 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + \cdots + 4 \cdot 23$ 2 BODA

$1 + 4 \cdot (1 + 2 + \cdots + 23)$ 1 BOD

Primjenom Gaussove dosjetke na $1 + 2 + \cdots + 23$ dobivamo:

$(1 + 2 + \cdots + 22) + 23 = 11 \cdot 23 + 23 = 253 + 23 = 276$ 2 BODA

Traženi broj je $1 + 4 \cdot 276 = 1105$. 1 BOD

………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

Uočimo da broj točaka u nekom liku možemo dobiti tako da gledamo koliko ima točaka na pravcima koji su paralelni dijagonali. 2 BODA

Dvadesettreći lik će imati $2 \cdot 23 + 1 = 47$ točaka na jednoj dijagonali. 1 BOD

Ako krenemo od jednog vrha do dijagonale imat ćemo redom 1, 3, 5, ..., 47 točaka. 1 BOD

Nakon toga je broj točaka 45, 43, ..., 5, 3, 1. 1 BOD

Stoga je traženi broj

$2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + \cdots + 2 \cdot 45 + 47$

$2 \cdot (1 + 3 + 5 + \cdots + 45) + 47$ 1 BOD

Primjenom Gaussove dosjetke na $1 + 3 + \cdots + 45$ dobivamo:

$1 + 3 + \cdots + 45 =$

$= (1 + 2 + \cdots + 45) - 2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 22)$

$= 1035 - 2 \cdot 253 = 529$ 3 BODA

Traženi broj je $2 \cdot 529 + 47 = 1105$ 1 BOD

………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA