ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. ožujka 2023.

7. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. U novčaniku se nalazi šest međusobno različitih kovanica centa i eura (5 centi, 10 centi, 20 centi, 50 centi, 1 € i 2 €). Iz novčanika se, istovremeno i bez gledanja, izvlače tri kovanice. Na koliko se različitih načina mogu izvući kovanice tako da je njihova ukupna vrijednost veća od 85 centi?

Prvo rješenje.
Budući da je zbroj vrijednosti svih kovanica u centima 5 + 10 + 20 + 50 = 85 centi, zaključujemo da zbroj vrijednosti bilo koje od te tri kovanice nikad neće biti veći od 85 centi.

Kako bi zbroj vrijednosti kovanica bio veći od 85 centi, barem jedna od tri kovanice mora biti kovanica od 1 € ili 2 €. 1 BOD

Kovanice izvlačimo istovremeno pa nije bitan redoslijed zapisivanja izvučenih kovanica.

Mogućnosti za izvučene kovanice s traženim svojstvom su:

{1 €, 5 centi, 10 centi}	{1 €, 5 centi, 20 centi}	{1 €, 5 centi, 50 centi}
{1 €, 10 centi, 20 centi}	{1 €, 10 centi, 50 centi}	{1 €, 20 centi, 50 centi}
{2 €, 5 centi, 10 centi}	{2 €, 5 centi, 20 centi}	{2 €, 5 centi, 50 centi}
{2 €, 10 centi, 20 centi}	{2 €, 10 centi, 50 centi}	{2 €, 20 centi, 50 centi}
{2 €, 1 €, 5 centi}	{2 €, 1 €, 10 centi}	
{2 €, 1 €, 20 centi}	{2 €, 1 €, 50 centi}	

8 BODOVA

(**Napomena:** Za svake dvije točno napisane mogućnosti dodjeljuje se 1 BOD. Broj dodijeljenih bodova mora biti cjelobrojan.)

Takve se kovanice mogu izvući na 16 različitih načina. 1 BOD

……………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.
Budući da je zbroj vrijednosti svih četiriju kovanica u centima 5 + 10 + 20 + 50 = 85 centi, zaključujemo da zbroj vrijednosti bilo koje od te tri kovanice nikad neće biti veći od 85 centi.

Kako bi zbroj vrijednosti kovanica bio veći od 85 centi, barem jedna od tri kovanice mora biti kovanica od 1 € ili 2 €. 1 BOD

Razlikujemo tri slučaja.

1. slučaj: jedna kovanica je od 1 €, a među preostale dvije nije kovanica od 2 €.

Od preostale četiri kovanice (5 centi, 10 centi, 20 centi, 50 centi) izvlačimo dvije kovanice. Prvu možemo izvući na 4 načina, a drugu na 3 načina. 2 BODA

Kako redoslijed izvlačenja nije bitan, ukupan broj mogućnosti je $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$. 1 BOD

2. slučaj: jedna kovanica je od 2 €, a među preostale dvije nije kovanica od 1 €.

Ovaj slučaj je analogan prethodnome. Od preostale četiri kovanice (5 centi, 10 centi, 20 centi, 50 centi) izvlačimo dvije kovanice. Kako redoslijed izvlačenja nije bitan, ukupan broj mogućnosti je $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$.
3 BODA

3. slučaj: izvučena je jedna kovanica od 1 € i jedna kovanica od 2 €.

Treća kovanica može biti bilo koja od preostale četiri kovanice (5 centi, 10 centi, 20 centi, 50 centi) pa su to 4 mogućnosti. 2 BODA

Ukupan broj mogućnosti za izvučene kovanice je $6 + 6 + 4 = 16$. 1 BOD
………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

2. Mika je postavio točno vrijeme na svom ručnom satu u podne. Točno sat vremena nakon toga na svom je ručnom satu očitao 12 h 57 minuta 36 s. Ako pretpostavimo da njegov ručni sat nastavlja kasniti na isti način, koje je stvarno vrijeme ako ručni sat pokazuje 19 h 30 minuta? Vrijeme izrazi u satima, minutama i sekundama.

Prvo rješenje.
Nakon 60 minuta na Mikinom je satu prošlo 57 minuta i 36 sekundi 1 BOD

ili $57\frac{36}{60} = 57\frac{6}{10} = 57.6$ minuta. 1 BOD

(**Napomena:** Drugi bod donosi zapis proteklog vremena na Mikinom ručnom satu u obliku mješovitog ili decimalnog broja.)

Od podne do 19 sati 30 minuta na Mikinom će satu proći 7 sati 30 minuta = 450 minuta. 1 BOD

Stvarno se vrijeme i vrijeme na Mikinom satu povećava proporcionalno.

Neka je k koeficijent proporcionalnosti. 1 BOD

Od 12 sati do 19 sati 30 minuta na Mikinom se satu vrijeme povećalo $k = \frac{450}{57.6} = 7.8125$ puta.
1 BOD

Do 19 sati 30 minuta sati stvarno će proći x minuta.

$x = 60 \cdot 7.8125$ minuta 1 BOD

$x = 468.75$ minuta 1 BOD

$x = 7$ h 48.75 minuta 1 BOD

$x = 7$ h 48 minuta 45 s 1 BOD

Mika je postavio točno vrijeme na svom ručnom satu u podne.
Od onda je prošlo 7 h 48 minuta 45 s pa je stvarno vrijeme 19 h 48 minuta 45 s. 1 BOD
………………………..………………………………………...….…. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.
Nakon 60 minuta na Mikinom je satu prošlo 57 minuta i 36 sekundi. 1 BOD

To znači da u jednom satu Mikin ručni sat kasni 2 minute 24 sekundi ili 144 sekundi. 1 BOD

(**Napomena:** Drugi bod donosi izražavanje vremena kašnjenja u sekundama.)

To je 144 sekundi kašnjenja na 3600 sekundi koje su protekle.

$$\frac{144}{3\,600} = 0.04 = 4\,\%$$

Zaključujemo da ručni sat kasni 4 % proteklog stvarnog vremena. 1 BOD

Od 12 sati do 19 sati 30 minuta na Mikinom će satu proći 7 sati 30 minuta = 450 minuta.
1 BOD

Tih 450 minuta je 96 % stvarnog vremena koje je proteklo od podneva.

Označimo s x stvarno vrijeme u minutama.

Vrijedi:

96 % od x je 450 1 BOD

$x = 450 : 0.96$ 1 BOD

$x = 468.75$ 1 BOD

$x = 7$ h 48.75 minuta 1 BOD

$x = 7$ h 48 minuta 45 s 1 BOD

Mika je postavio točno vrijeme na svom ručnom satu u podne.
Od onda je prošlo 7 h 48 minuta 45 s pa je stvarno vrijeme 19 h 48 minuta 45 s. 1 BOD
……………………..……………………………………………...….… UKUPNO 10 BODOVA

3. U jednoj velikoj tvrtki na računalima se proširio računalni virus. U siječnju je virusom zaraženo 30 % svih računala. U veljači je s 30 % zaraženih računala uklonjen virus, a 30 % u tom trenutku nezaraženih računala je zaraženo virusom. U ožujku je s 30 % zaraženih računala uklonjen virus, a na 30 % u tom trenutku nezaraženih računala se pojavio virus. Koliki postotak računala u toj tvrtki nije zaražen virusom na početku travnja?

Rješenje.
Računala u tvrtki su ili zaražena ili nisu zaražena.

Neka je x broj svih računala te tvrtke.

U siječnju: 30 % od x ili $0.3x$ je zaraženo. 70 % od x ili $0.7x$ nije zaraženo.

U veljači: $0.3 \cdot 0.7x = 0.21x$ je zaraženo.
1 BOD

$0.3 \cdot 0.3x = 0.09x$ više nije zaraženo.
1 BOD

$0.3x - 0.09x = 0.21x$ je još uvijek zaraženo.
1 BOD

$0.7x - 0.21x = 0.49x$ i dalje nije zaraženo.

1 BOD

Ukupno $0.21x + 0.21x = 0.42x$ je zaraženo.

1 BOD

Ukupno $0.09x + 0.49x = 0.58x$ nije zaraženo.

1 BOD

U ožujku: $0.3 \cdot 0.58x = 0.174x$ je zaraženo.

1 BOD

$0.3 \cdot 0.42x = 0.126x$ više nije zaraženo.

1 BOD

$0.58x - 0.174x = 0.406x$ i dalje nije zaraženo.

1 BOD

Ukupno $0.126x + 0.406x = 0.532x$ nije zaraženo.

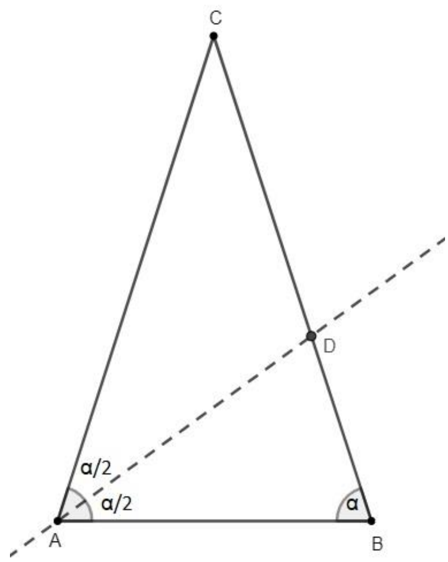
Na početku travnja u toj tvrtki virusom nije zaraženo 53.2 % računala. 1 BOD

……………………………………………………………………………………. UKUPNO 10 BODOVA

4. Zadan je jednakokračan trokut ABC s osnovicom $\overline{AB}$ koja je kraća od kraka. Točka D je sjecište simetrale kuta $\angle BAC$ i kraka $\overline{BC}$. Odredi veličine kutova trokuta ABC ako je trokut ABD jednakokračan.

Rješenje.

Skica:



1 BOD

Neka je $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CBA| = \alpha$. Tada je $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAC| = \frac{\alpha}{2}$.

Kako je $\sphericalangle CDA$ vanjski kut trokuta ABD, slijedi da je $|\sphericalangle CDA| = \alpha + \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}\alpha$. 2 BODA

Prema uvjetu zadatka trokut ABD jednakokračan. Promotrimo koje stranice mogu biti krakovi trokuta ABD.

Promatramo tri slučaja.

1. *slučaj:*
   Neka je $|AD| = |BD|$.
   Kako je $|\sphericalangle DBA| = \alpha > \frac{\alpha}{2} = |\sphericalangle BAD|$, slijedi da je $|AD| > |BD|$ pa stranice $\overline{AD}$ i $\overline{BD}$ ne mogu biti krakovi trokuta ABD. 1 BOD

2. *slučaj:*
   Neka je $|AB| = |BD|$.
   Tada je $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle BAD| = \frac{\alpha}{2}$.
   Kutovi $\sphericalangle CDA$ $\sphericalangle ADB$ su sukuti pa je

$$|\sphericalangle CDA| + |\sphericalangle ADB| = \frac{3}{2}\alpha + \frac{\alpha}{2} = 2\alpha = 180°$$

   tj.

$$\alpha = 90°$$

   To nije moguće jer trokut ne može imati dva prava kuta.
   Stranice $\overline{AB}$ i $\overline{BD}$ ne mogu biti krakovi trokuta ABD. 1 BOD

   (Ili: Da bi bilo $|AB| = |BD|$, točka D mora ležati na visini iz vrha C na osnovicu jednakokračnog trokuta ABC, što je nemoguće jer je D na kraku između točaka B i C. 1 BOD)

3. *slučaj:*
   Neka je $|AB| = |AD|$
   Tada je $|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle DBA| = \alpha$.
   Kako je zbroj veličina kutova u trokutu 180°, za trokut ABD vrijedi

$$\frac{\alpha}{2} + \alpha + \alpha = 180°$$

$$\alpha = 72°$$

2 BODA

   Nadalje,

$$|\sphericalangle ACB| = 180° - 2 \cdot 72° = 36°$$

2 BODA

   Veličine unutarnjih kutova trokuta ABC su $72°, 72°, 36°$. 1 BOD

(**Napomena:** Ako učenik dobije točno rješenje promatrajući samo jednakokračan trokut ABD s krakovima $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$, a nije utvrdio da nema drugih rješenja (odbacivanje slučajeva da su krakovi $\overline{AD}$ i $\overline{BD}$, tj. $\overline{AB}$ i $\overline{BD}$) može dobiti najviše 8 BODOVA.)

…………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

5. Ako nekom troznamenkastom prirodnom broju s različitim znamenkama dodamo troznamenkasti broj zapisan istim znamenkama u obrnutom redoslijedu i umanjen za 50 %, dobit ćemo novi troznamenkasti broj. Koji troznamenkasti broj treba odabrati kako bi dobiveni broj nakon provedenih računskih radnji bio najveći mogući?

Rješenje.

Neka je $\overline{abc}$ traženi troznamenkasti broj gdje su a, b i c znamenke takve da je $a \neq 0$.
Tada je $\overline{cba}$ troznamenkasti broj čije su znamenke u obrnutom redoslijedu, $c \neq 0$.

$\overline{cba} = 100c + 10b + a$ pa je za 50 % manji od njega (njegova polovina) broj oblika $50c + 5b + 0.5a$.

1 BOD

Promatrani zbroj je

$$\overline{abc} + \frac{1}{2}\overline{cba} = 100a + 10b + c + 50c + 5b + 0.5a = 100.5a + 15b + 51c.$$

1 BOD

Budući da zbroj treba biti prirodan troznamenkasti broj, tada $0.5a$, tj. $100.5a$ mora biti prirodan broj. Zato a mora biti paran.

Dakle, $a \in \{2,4,6,8\}$. 1 BOD

1. slučaj
Neka je $a = 2$.
Tada je promatrani zbroj $201 + 15b + 51c$.
Zbroj ima najveću vrijednost ako je $c = 9$ i $b = 8$, $201 + 120 + 459 = \mathbf{780}$. 1 BOD

2. slučaj
Neka je $a = 4$.
Tada je promatrani zbroj $402 + 15b + 51c$.
Zbroj ima najveću vrijednost ako je $c = 9$ i $b = 8$, $402 + 120 + 459 = \mathbf{981}$. 1 BOD

3. slučaj
Neka je $a = 6$.
Tada je promatrani zbroj $603 + 15b + 51c$.

$$603 + 15b + 51c \leq 999$$
$$15b + 51c \leq 396$$
$$15b \leq 396 - 51c$$

c	$51c$	$396 - 51c$	
7	357	39	b = 2
6	306	90	b = 6
5	255	141	b = 9

Najveći zbroj je kad je $c = 6$, $b = 6$, ali $b = c$ pa taj slučaj odbacujemo.

Sljedeći najveći zbroj je za $c = 5$, $b = 9$, $603 + 255 + 135 = \mathbf{993.}$ 2 BODA

(**Napomena 1:** Učenik koji na bilo koji način pokaže koji slučaj odbacuje te kada se postiže i koliki je najveći zbroj, dobiva 2 BODA.)

4. *slučaj*
Neka je $a = 8$.
Tada je promatrani zbroj $804 + 15b + 51c$.

$$804 + 15b + 51c \leq 999$$
$$15b + 51c \leq 195$$
$$15b \leq 195 - 51c$$

c	$51c$	$195 - 51c$	
3	153	42	$b = 2$
2	102	93	$b = 6$
1	51	144	$b = 9$

Zbroj ima najveću vrijednost ako je $c = 2$, $b = 6$, $804 + 90 + 102 = \mathbf{996}$. 2 BODA

(Napomena 2: Učenik koji na bilo koji način pokaže kada se postiže i koliki je najveći zbroj, dobiva 2 BODA.)

Od svih mogućnosti, najveći troznamenkasti zbroj dobiva se ako odaberemo broj $\mathbf{862}$. 1 BOD
………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA