ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. ožujka 2023.

8. razred – rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Izračunaj vrijednost izraza:

$$\frac{\left(\sqrt{666}+\sqrt{888}\right)^2-\sqrt{666^2+888^2}}{444}.$$

Prvo rješenje.

Računamo redom:

$\left(\sqrt{666}+\sqrt{888}\right)^2 =$

$666+2\cdot\sqrt{666}\cdot\sqrt{888}+888=$ 1 BOD

$1554+2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{111}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{111}=$ 1 BOD

$1554+222\sqrt{48}=$ 1 BOD

$1554+222\cdot 4\sqrt{3}=$

$1554+888\sqrt{3}$ 1 BOD

$\sqrt{666^2+888^2}=$

$\sqrt{6^2\cdot 111^2+8^2\cdot 111^2}=$ 1 BOD

$\sqrt{111^2\cdot(6^2+8^2)}=$ 1 BOD

$111\cdot\sqrt{100}=$ 1 BOD

1110 1 BOD

Konačno:

$\dfrac{\left(\sqrt{666}+\sqrt{888}\right)^2-\sqrt{666^2+888^2}}{444}=$

$\dfrac{1554+888\sqrt{3}-1110}{444}=$

$\dfrac{444+888\sqrt{3}}{444}=$

$1+2\sqrt{3}.$ 2 BODA

…………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.

$$\frac{\left(\sqrt{666}+\sqrt{888}\right)^2-\sqrt{666^2+888^2}}{444}=\frac{\left(\sqrt{111\cdot 6}+\sqrt{111\cdot 8}\right)^2-\sqrt{(111\cdot 6)^2+(111\cdot 8)^2}}{111\cdot 4}$$

2 BODA

$$=\frac{\left(\sqrt{111}\cdot\sqrt{6}+\sqrt{111}\cdot\sqrt{8}\right)^2-\sqrt{111^2\cdot 6^2+111^2\cdot 8^2}}{111\cdot 4}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{111}\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{8})\right)^2-\sqrt{111^2\cdot(6^2+8^2)}}{111\cdot 4}$$

2 BODA

$$=\frac{\sqrt{111}^2\cdot(\sqrt{6}+\sqrt{8})^2-\sqrt{111^2\cdot(36+64)}}{111\cdot 4}$$

$$=\frac{111\cdot(6+2\sqrt{6}\cdot\sqrt{8}+8)-111\sqrt{100}}{111\cdot 4}$$

2 BODA

$$=\frac{111\cdot(14+2\sqrt{48})-111\cdot 10}{111\cdot 4}$$

$$=\frac{111\cdot(14+2\sqrt{16\cdot 3}-10)}{111\cdot 4}$$

2 BODA

$$=\frac{4+8\sqrt{3}}{4}$$

$=1+2\sqrt{3}$ 2 BODA

……………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

2. Pronađi sve parove prirodnih brojeva čija je razlika kvadrata 2023.

Rješenje.

Ako su a i b prirodni brojevi, onda vrijedi $a^2-b^2=2023$.

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 1 BOD

$2023=7\cdot 17\cdot 17$ 2 BODA

S obzirom da vrijedi $a+b>a-b$, imamo 3 rješenja:* 1 BOD

I. $(a+b)(a-b)=2023\cdot 1$

$a+b=2023$
$\underline{a-b=1}$

$2a=2024$
$a=1012$ $b=1011$ 2 BODA

II. $(a+b)(a-b)=289\cdot 7$

$a+b=289$
$\underline{a-b=7}$

$2a=296$
$a=148$ $b=141$ 2 BODA

III. $(a+b)(a-b) = 119 \cdot 17$

$a+b = 119$
$\underline{a-b = 17}$

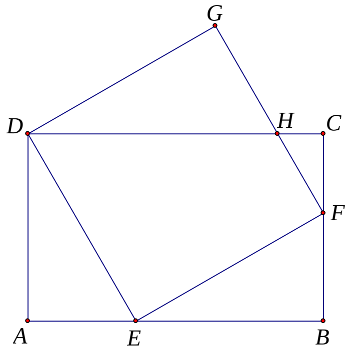
$2a = 136$
$a = 68$ $\qquad$ $b = 51$ $\qquad$ 2 BODA
…………………………..……………………….……………………...….…. UKUPNO 10 BODOVA

***Primjedba.** Umjesto da koristimo $a+b > a-b$, alternativno se mogu ispitati 3 slučaja u kojima je $a+b < a-b$ i dobiti da u ta 3 slučaja nema rješenja.

Ukoliko učenik ne napomene da, zbog uvjeta $a+b > a-b$, možemo promatrati samo 3 slučaja ili alternativno ne provjeri svih 6 mogućnosti, ne može dobiti taj bod, tj. ukupno može dobiti najviše 9 bodova.

3. Zadan je pravokutnik $ABCD$. Za kvadrat $DEFG$ vrijedi da je točka D vrh pravokutnika, točka E pripada dužini $\overline{AB}$, točka F pripada dužini $\overline{BC}$ i $|\angle BEF| = 30°$. Ako je površina kvadrata $DEFG$ 36 cm^2, izračunaj opseg i površinu presjeka pravokutnika $ABCD$ i kvadrata $DEFG$.

Rješenje.
Točka H je presjek dužina $\overline{DC}$ i $\overline{FG}$.



Površina kvadrata je 36 cm^2, pa je duljina stranice kvadrata 6 cm. 1 BOD
$|\angle BEF| = 30°$ i $|\angle FED| = 90°$, pa je $|\angle DEA| = 60°$.
$|\angle BEF| = 30°$ i $|\angle FBE| = 90°$, pa je $|\angle EFB| = 60°$.
$|\angle DEA| = 60°$ i $|\angle EAD| = 90°$, pa je $|\angle ADE| = 30°$.
Trokuti ΔAED i ΔEBF su polovine jednakostraničnog trokuta u kojem vrijedi da je duljina hipotenuze dvostruko dulja od kraće katete. 1 BOD

Kako je $|DE| = |EF| = 6$, slijedi da je $|AE| = |BF| = 3$. 1 BOD
Neka je $|AD| = |EB| = x$.
Primjenom Pitagorina poučka slijedi:
$x^2 + 3^2 = 6^2$
$x = 3\sqrt{3}$
Znači, $|AD| = |EB| = 3\sqrt{3}$. 1 BOD

$|\angle EFB| = 60°$ i $|\angle GFE| = 90°$, pa je $|\angle CFH| = 30°$.
$|\angle CFH| = 30°$ i $|\angle HCF| = 90°$, pa je $|\angle FHC| = 60°$.
Trokut ΔHFC je također polovina jednakokračnog trokuta. 1 BOD
$|FC| = |BC| - |BF| = 3\sqrt{3} - 3$.

Neka je $|HF| = 2|CH| = 2y$.

Iz Pitagorinog poučka slijedi $y^2 + \left(3\sqrt{3} - 3\right)^2 = 4y^2$, odnosno $\left(3\sqrt{3} - 3\right)^2 = 3y^2$, pa je

$$y^2 = \frac{\left(3\sqrt{3} - 3\right)^2}{3}$$

i nadalje

$$y = \frac{3\sqrt{3} - 3}{\sqrt{3}} = 3 - \sqrt{3}.$$

1 BOD

Stoga je

$|HF| = 2y = 6 - 2\sqrt{3}$ i 1 BOD

$|DH| = |DC| - |HC| = 3 + 3\sqrt{3} - \left(3 - \sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$. 1 BOD

Presjek pravokutnika i kvadrata je trapez $DEFH$.

Opseg iznosi:

$o = |DE| + |EF| + |HF| + |DH| = 6 + 6 + 6 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = \left(18 + 2\sqrt{3}\right)$ cm. 1 BOD

Površina možemo izračunati tako da od površine pravokutnika $ABCD$ oduzmemo površine dvaju sukladnih pravokutnih trokuta ΔAED i ΔEBF i površinu pravokutnog trokuta ΔFCH:

$$\begin{aligned} P &= \left(3 + 3\sqrt{3}\right) \cdot 3\sqrt{3} - 2 \cdot \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2} - \frac{(3 - \sqrt{3})(3\sqrt{3} - 3)}{2} \\ &= 9\sqrt{3} + 27 - 9\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3} - 9 - 9 + 3\sqrt{3}}{2} \\ &= 27 - \frac{12\sqrt{3} - 18}{2} \\ &= 27 - 6\sqrt{3} + 9 \\ &= \left(36 - 6\sqrt{3}\right) \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

1 BOD

(**Alternativno,** površinu možemo računati koristeći formulu za površinu trapeza:

$$P = \frac{|DE| + |HF|}{2} \cdot |EF| = \frac{6 + 6 - 2\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = \left(36 - 6\sqrt{3}\right) \text{ cm}^2.$$

1 BOD)

……………………..………………………………………..…..…. UKUPNO 10 BODOVA

4. U grupi se nalazi 6 Varaždinaca, 6 Zadrana i 6 Osječana. Na koliko se načina oni mogu podijeliti u:
a) 6 skupina od 3 osobe tako da se u svakoj skupini nalazi po jedan Varaždinac, jedan Zadranin i jedan Osječanin?
b) 3 skupine od 6 osoba tako da se u svakoj skupini nalaze po dva Varaždinca, dva Zadranina i dva Osječanina?

Rješenje.

a) Prvi način.

Izbor jednog od šest Varaždinaca u prvu skupinu možemo napraviti na 6 načina, a na jednako načina i izbor jednog od šest Zadrana te jednog od šest Osječana pa to ukupno možemo napraviti na $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$ načina. 1 BOD

Nakon toga izbor za drugu skupinu možemo napraviti na 5^3 načina, za treću na 4^3, potom na 3^3 pa na 2^3 načina, odnosno ukupno na $(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)^3 = 720^3$ načina. 1 BOD

No, nama nije bitan poredak tih skupina, jer su jednakopravne, a kako šest skupina možemo poredati na $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ načina, onda je ukupni broj rasporeda $\frac{720^3}{720} = 720^2$. 2 BODA

Ukupno, broj rasporeda je $720^2 = 518\,400$.

a) Drugi način.
Najprije fiksirajmo izbor svih Varaždinaca u svaku od šest skupina, jer nam nije bitan poredak tih skupina. 2 BODA

Potom izbor jednog od šest Osječana u prvu skupinu možemo napraviti na 6 načina, a na jednako načina i izbor jednog od šest Zadrana pa to ukupno možemo napraviti na $6 \cdot 6 = 6^2$ načina. 1 BOD

Nakon toga izbor za drugu skupinu možemo napraviti na 5^2 načina, za treću na 4^2, potom na 3^2 pa na 2^2 načina, odnosno ukupno na $(6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)^2 = 720^2 = 518\,400$ načina. 1 BOD

b) Izbor dva od šest Varaždinaca u prvu skupinu možemo napraviti na $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ načina, a na jednako načina i izbor dva od šest Zadrana i dva od šest Osječana pa to ukupno možemo napraviti na $15 \cdot 15 \cdot 15 = 15^3$ načina. 2 BODA

Izbor sljedeća dva od šest Varaždinaca u drugu skupinu možemo napraviti na $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ načina, a na jednako toliko načina i izbor od sljedeća dva od šest Zadrana i sljedeća dva od šest Osječana pa to ukupno možemo napraviti na $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$ načina. 1 BOD

Preostala su dva Varaždinca, dva Osječana i dva Zadranina pa njih možemo jednoznačno rasporediti u treću skupinu.

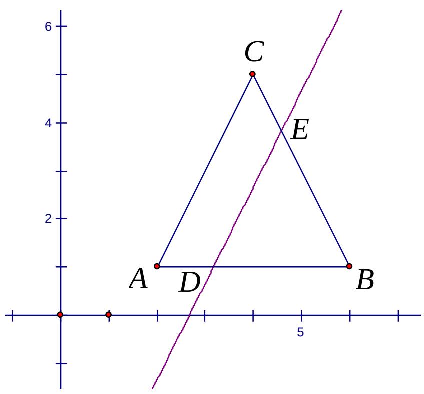
Ukupno se raspored u tri skupine može napraviti na $(15 \cdot 6)^3 = 90^3$ načina. 1 BOD

No, nama nije bitan poredak tih skupina, jer su jednakopravne, a kako tri skupine možemo poredati na $3 \cdot 2 = 6$ načina, onda je ukupni broj rasporeda $\frac{90^3}{6}$. 2 BODA

Ukupno, broj rasporeda je $\frac{90^3}{6} = 121\,500$.
………………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA

5. U koordinatnoj ravnini zadan je jednakokračni trokut ΔABC s vrhovima $A(2,1)$, $B(6,1)$ i $C(4,5)$. Odredi jednadžbe svih pravaca koji su paralelni s nekim od krakova i dijele trokut na dva dijela jednakih površina.

Prvo rješenje.
Pravac dijeli trokut na trapez i jednakokračan trokut.



Trokuti ΔABC i ΔDBE su slični prema poučku KK s koeficijentom sličnosti k, a omjer površina je k^2.
1 BOD

Površina trokuta ΔABC dva je puta veća od površine trokuta ΔDBE pa je $k^2 = 2$, a $k = \sqrt{2}$. 1 BOD

Iz $|AB| = 4$ i $k = \sqrt{2}$ slijedi

$\frac{|AB|}{|DB|} = \sqrt{2}$ pa je $|DB| = \frac{|AB|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. 1 BOD

Znači, koordinate točke D su $D\left(6 - 2\sqrt{2}, 1\right)$. 1 BOD

Jednadžbu pravca AC dobijemo rješavanjem sustava:
$A(2,1)$, $C(4,5)$; $y = ax + b$

$1 = 2a + b$
$\underline{5 = 4a + b}$

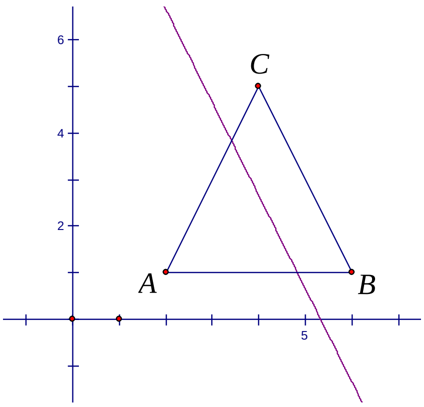
$y = 2x - 3$ 2 BODA

(**Primjedba.** Za dobiti ova 2 BODA dovoljno je odrediti da je $a = 2$.)

Traženi pravac paralelan je s pravcem AC pa ima isti nagib i prolazi točkom D.

$D\left(6 - 2\sqrt{2}, 1\right)$, $a = 2$; $y = ax + b$

$1 = 2\left(6 - 2\sqrt{2}\right) + b$
$b = -11 + 4\sqrt{2}$
$y = 2x - 11 + 4\sqrt{2}$ 1 BOD



Analogno se dobije pravac paralelan s krakom BC koji prolazi točkom $\left(2 + 2\sqrt{2}, 1\right)$.

Jednadžbu pravca BC dobijemo rješavanjem sustava:
$B(6,1)$, $C(4,5)$; $y = ax + b$

$1 = 6a + b$
$\underline{5 = 4a + b}$

$y = -2x + 13$ 2 BODA

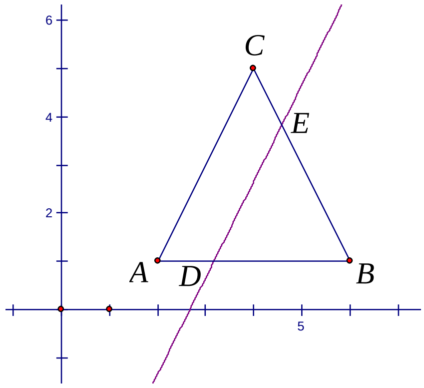
(**Primjedba.** Za dobiti ova 2 BODA dovoljno je odrediti da je $a = -2$. To slijedi iz simetrije s prethodnim slučajem pa uz taj zaključak nije potrebno ponovo računati a.)

Traženi pravac paralelan je s pravcem AC pa ima isti nagib i prolazi točkom $\left(2 + 2\sqrt{2}, 1\right)$.

$\left(2 + 2\sqrt{2}, 1\right)$, $a = -2$; $y = ax + b$

$1 = -2\left(2 + 2\sqrt{2}\right) + b$
$b = 5 + 4\sqrt{2}$
$y = -2x + 5 + 4\sqrt{2}$ 1 BOD
………………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugo rješenje.
Prvi slučaj:
Pravac dijeli trokut na trapez i jednakokračan trokut.



U trokutu ΔABC je $|AB| = 4$.
Duljina visine iz vrha C na osnovicu $\overline{AB}$ je $v_1 = 4$.

Površina trokuta ΔABC je

$$P_{\Delta ABC} = \frac{|AB| \cdot v_1}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8.$$

Površina trokuta ΔDBE je

$$P_{\Delta DBE} = \frac{1}{2} P_{\Delta ABC} = 4.$$

Trokuti ΔABC i ΔDBE su slični prema poučku KK s koeficijentom sličnosti k, a omjer površina je k^2.
1 BOD

Površina trokuta ΔABC dva je puta veća od površine trokuta ΔDBE pa je $k^2 = 2$, a $k = \sqrt{2}$. 1 BOD

Iz $|AB| = 4$ i $k = \sqrt{2}$ slijedi

$\frac{|AB|}{|DB|} = \sqrt{2}$ pa je $|DB| = \frac{|AB|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. 1 BOD

Znači, koordinate točke D su $D\left(6 - 2\sqrt{2}, 1\right)$. 1 BOD

Duljina visine trokuta ΔDBE iz vrha E na osnovicu $\overline{DB}$ je

$$v_2 = \frac{v_1}{k} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

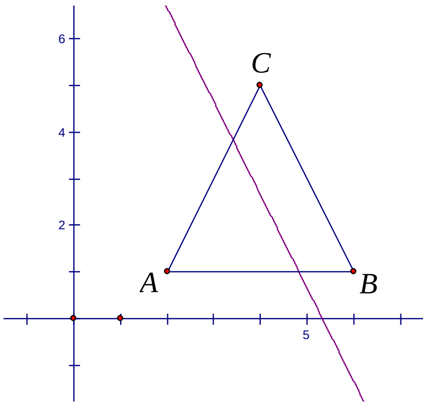
Apscisa točke E je aritmetička sredina apscisa točaka D i B, a ordinata je $v_2 + 1 = 2\sqrt{2} + 1$, dakle $E(6 - \sqrt{2}, 2\sqrt{2} + 1)$. 1 BOD

Pravac kroz točke D i E:
$D\left(6 - 2\sqrt{2}, 1\right)$, $E(6 - \sqrt{2}, 2\sqrt{2} + 1)$; $\quad y = ax + b$

$1 = (6 - 2\sqrt{2})a + b$
$\underline{2\sqrt{2} + 1 = (6 - \sqrt{2})a + b}$

Oduzmemo jednadžbe:
$\sqrt{2}a = 2\sqrt{2}$
$a = 2$
$b = 1 - 12 + 4\sqrt{2} = -11 + 4\sqrt{2}$
Jednadžba pravca je $y = 2x - 11 + 4\sqrt{2}$. 2 BODA

Drugi slučaj:



Analogno se odrede točke $D\left(2+2\sqrt{2}, 1\right)$ i $E(2+\sqrt{2}, 2\sqrt{2}+1)$ po simetriji, te potom jednadžba drugog pravca $y=-2x+5+4\sqrt{2}$. 3 BODA

…………………………………………………………………….……..……. UKUPNO 10 BODOVA