ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
23. veljače 2016.

8. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

$$\frac{5n^2-9}{2n+6}=\frac{5n^2-45+36}{2(n+3)}=\frac{5(n^2-9)+36}{2(n+3)}=\frac{5(n-3)(n+3)}{2(n+3)}+\frac{36}{2(n+3)}=\frac{5(n-3)}{2}+\frac{18}{n+3}$$ 4 BODA

Da bi vrijednost tog razlomka bila cijeli broj mora biti:

a) $n - 3$ paran broj, odnosno n neparan broj, 1 BOD

b) $n + 3 \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18, -18\}$. 1 BOD

Kako je n neparan, onda je $n + 3$ paran broj pa je $n + 3 \in \{2, -2, 6, -6, 18, -18\}$. 2 BODA

Sada je $n \in \{-1, -5, 3, -9, 15, -21\}$. 2 BODA

…………………………………………………………..…………….….… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Svako pogođeno rješenje bez obrazloženja vrijedi po 1 bod.

Drugi način:

$$\frac{5n^2-9}{2n+6}=\frac{5\left(n^2-\frac{9}{5}\right)}{2(n+3)}=\frac{5}{2}\left[\frac{n(n+3)-3n-\frac{9}{5}}{(n+3)}\right]=$$

$$=\frac{5}{2}\left[n-\frac{3n+\frac{9}{5}}{n+3}\right]=\frac{5}{2}\left[n-\frac{3(n+3)-9+\frac{9}{5}}{n+3}\right]=$$

$$=\frac{5}{2}\left[n-3+\frac{\frac{36}{5}}{n+3}\right]=\frac{5}{2}(n-3)+\frac{5}{2}\cdot\frac{36}{5(n+3)}=$$

$$=\frac{5}{2}(n-3)+\frac{18}{n+3}$$ 4 BODA

Da bi vrijednost tog razlomka bila cijeli broj mora biti:

a) $n - 3$ paran broj, odnosno n neparan broj, 1 BOD

b) $n + 3 \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, 9, -9, 18, -18\}$. 1 BOD

Kako je n neparan, onda je $n + 3$ paran broj pa je $n + 3 \in \{2, -2, 6, -6, 18, -18\}$. 2 BODA

Sada je $n \in \{-1, -5, 3, -9, 15, -21\}$. 2 BODA

…………………………………………………………..…………….….… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Svako pogođeno rješenje bez obrazloženja vrijedi po 1 bod.

2. Prvi način:

Ako je prvi broj x, onda se drugi može prikazati kao $10 - x$, a uvjet zadatka daje:

$x^2 : (10 - x)^2 = 1 : 16$. 2 BODA

Dalje slijedi: $16x^2 = (10 - x)^2$

$16x^2 = 100 - 20x + x^2$

$15x^2 + 20x - 100 = 0 \quad / : 5$

$3x^2 + 4x - 20 = 0$ 2 BODA

Ovu kvadratnu jednadžbu riješimo rastavljanjem srednjeg člana:

$3x^2 - 6x + 10x - 20 = 0$

$3x \cdot (x - 2) + 10 \cdot (x - 2) = 0$

$(x - 2) \cdot (3x + 10) = 0$ 2 BODA

Iz $x - 2 = 0$ je rješenje $x_1 = 2$, a iz $3x + 10 = 0$ je rješenje $x_2 = -\frac{10}{3}$. 2 BODA

Još se izračuna $10 - 2 = 8$ odnosno $10 - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{40}{3}$. 1 BOD

Konačno, $10 = 2 + 8$ i $10 = -\frac{10}{3} + \frac{40}{3}$. 1 BOD

………………………………..……………………...……………..… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Ako je prvi broj x, onda se drugi može prikazati kao $10 - x$, a uvjet zadatka daje:

$x^2 : (10 - x)^2 = 1 : 16$. 2 BODA

Dalje slijedi $(x : (10 - x))^2 = (1 : 4)^2$ 2 BODA

pa je $\frac{x}{10 - x} = \frac{1}{4}$ ili $\frac{x}{10 - x} = -\frac{1}{4}$. 2 BODA

Prva mogućnost daje $4x = 10 - x$ te je rješenje $x_1 = 2$, a druga mogućnost daje $4x = -10 + x$

te je rješenje $x_2 = -\frac{10}{3}$. 2 BODA

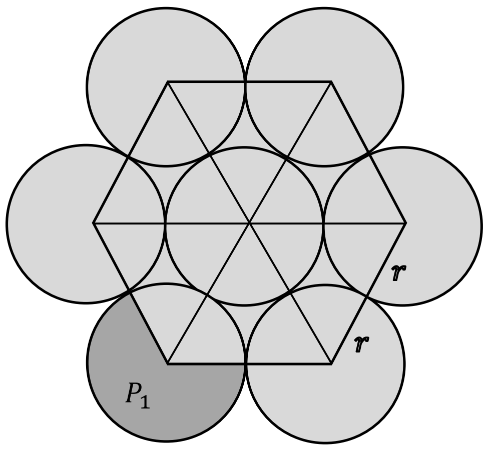
Još se izračuna $10 - 2 = 8$ odnosno $10 - \left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{40}{3}$. 1 BOD

Konačno, $10 = 2 + 8$ i $10 = -\frac{10}{3} + \frac{40}{3}$. 1 BOD

…………………………………..………………………..……………..… UKUPNO 10 BODOVA

3. Prvi način:

Skica: 1 BOD



Spojimo li središta vanjskih 6 krugova, dobit ćemo pravilni šesterokut stranice $a = 2r$. 1 BOD

Površina tog šesterokuta jednaka je šesterostrukoj površini jednakostraničnog trokuta stranice

$a = 2r$ odnosno $P_{\text{šesterokuta}} = 6 \cdot P_{\Delta} = 6 \cdot \frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4} = 6r^2\sqrt{3}$. 3 BODA

Preostala površina sastoji se od šest jednakih kružnih isječaka s pripadnim središnjim kutom 240°.

Svaki od njih ima površinu jednaku $\frac{2}{3}$ površine cijelog kruga. Dakle, $P_1 = \frac{2}{3} \cdot r^2\pi$. 3 BODA

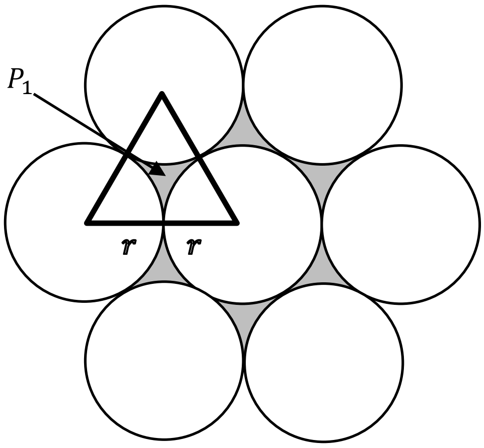
Prema tome, osjenčani lik ima površinu

$P = P_{\text{šesterokuta}} + 6P_1 = 6r^2\sqrt{3} + 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot r^2\pi = 6r^2\sqrt{3} + 4r^2\pi$. 2 BODA

……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Skica: 1 BOD



Lik se sastoji od 7 jednakih krugova površine $P_{\text{kruga}} = r^2\pi$ i šest jednakih (nepravilnih) dijelova površine P_1 (vidi sliku). 1 BOD

Površina nepravilnog lika P_1 može se izračunati kao površina jednakostraničnog trokuta stranice $2r$ umanjena za površinu tri jednaka kružna isječka središnjeg kuta 60°, točnije, za tri šestine površine kruga polumjera r. 2 BODA

Površina jednakostraničnog trokuta je $P_\Delta = \dfrac{(2r)^2\sqrt{3}}{4} = r^2\sqrt{3}$. 2 BODA

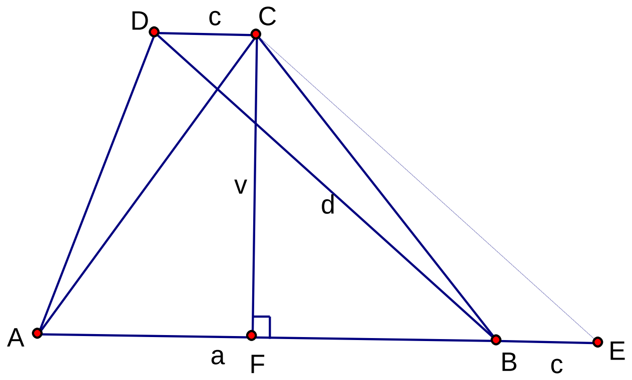
Dakle, $P_1 = P_\Delta - \dfrac{1}{2}P_{\text{kruga}} = r^2\sqrt{3} - \dfrac{r^2\pi}{2}$. 2 BODA

Prema tome, osjenčani lik ima površinu

$P = 7P_{\text{kruga}} + 6P_1 = 7r^2\pi + 6\cdot\left(r^2\sqrt{3} - \dfrac{r^2\pi}{2}\right) = 7r^2\pi + 6r^2\sqrt{3} - 3r^2\pi = 6r^2\sqrt{3} + 4r^2\pi$. 2 BODA

………………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

4. Prvi način:



Skica: 1 BOD

Zadana se jednadžba može zapisati u obliku $d^2 - 30d + v^2 - 24v + 369 = 0$

odnosno nadopunom na potpuni kvadrat $(d - 15)^2 - 225 + (v - 12)^2 - 144 + 369 = 0$

i konačno $(d - 15)^2 + (v - 12)^2 = 0$. 2 BODA

Lijeva strana jednadžbe jednaka je 0 ako je $d - 15 = 0$ i $v - 12 = 0$. 1 BOD

Iz $d - 15 = 0$ slijedi da je $d = 15$ cm, a

iz $v - 12 = 0$ slijedi da je $v = 12$ cm. 1 BOD

Na produžetku stranice $\overline{AB}$ preko vrha B odaberimo točku E tako da je $d(B,E) = d(C,D)$.

Tada je $d(A,E) = a + c$.

Četverokut $BECD$ je paralelogram pa je $d(C,E) = d = 15$ cm. 1 BOD

Iz pravokutnog trokuta ΔAFC dobiva se $d(A,F) = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5\,\text{cm}$, a

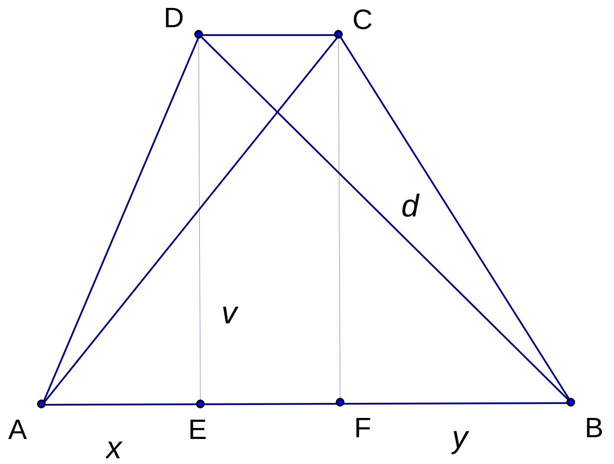
iz pravokutnog trokuta ΔCFE $d(F,E) = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9\,\text{cm}$. 2 BODA

Kako je $d(A,F) + d(F,E) = d(A,E) = d(A,B) + d(B,E) = a + c = 5 + 9 = 14$ cm,

površina trapeza je $P = \dfrac{a+c}{2} \cdot v = 84\,\text{cm}^2$. 2 BODA

…………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:



Skica: 1 BOD

Zadana se jednadžba može zapisati u obliku $d^2 - 30d + v^2 - 24v + 369 = 0$

odnosno nadopunom na potpuni kvadrat $(d - 15)^2 - 225 + (v - 12)^2 - 144 + 369 = 0$

i konačno $(d - 15)^2 + (v - 12)^2 = 0$. 2 BODA

Lijeva strana jednadžbe jednaka je 0 ako je $d - 15 = 0$ i $v - 12 = 0$. 1 BOD

Iz $d - 15 = 0$ slijedi da je $d = 15$ cm, a

iz $v - 12 = 0$ slijedi da je $v = 12$ cm. 1 BOD

Neka su E i F nožišta visina iz vrhova D i C redom na osnovicu $\overline{AB}$.

Nadalje, neka je $|AE| = x$ i $|BF| = y$, a $|CD| = c$, $|AB| = a$.

Kako je četverokut $EFCD$ pravokutnik, slijedi $|EF| = c$. 1 BOD

Primjenom Pitagorinog poučka na trokute ΔDEB i ΔAFC dobije se $|BE| = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ cm i

$|AF| = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ cm. 2 BODA

Slijedi $|BE| = c + y = 9$, $|AF| = x + c = 5$.

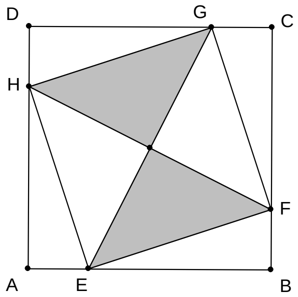
Zbrajanjem tih dviju jednakosti dobije se $x + y + 2c = 14$ odnosno $x + c + y + c = 14$, tj.

$a + c = 14$. 1 BOD

Površina trapeza je $P = \dfrac{a+c}{2} \cdot v = 84\,\text{cm}^2$. 1 BOD

……………………………………………………………………………… UKUPNO 10 BODOVA

5. Prvi način:



Neka je a duljina stranice kvadrata.

Tada je $|AE|=|BF|=|CG|=|DH|=\frac{1}{4}a$, $|BE|=|CF|=|DG|=|AH|=\frac{3}{4}a$. 1 BOD

Trokuti ΔHAE, ΔEBF, ΔFCG i ΔGDH su međusobno sukladni (pravokutni trokuti sa sukladnim stranicama duljina $\frac{1}{4}a$ i $\frac{3}{4}a$, prema poučku S-K-S o sukladnosti). 1 BOD

Iz sukladnosti tih trokuta slijedi $|FE|=|GF|=|HG|=|EH|=x$. 1 BOD

Promotrimo trokut ΔHAE.

Neka je $|\measuredangle AEH|=\alpha$ i $|\measuredangle EHA|=\beta$. Vrijedi $\alpha+\beta=90°$.

Zbog sukladnosti trokuta ΔHAE i ΔEBF je $|\measuredangle BEF|=\beta$.

Zato je $|\measuredangle HEF|=180°-(\alpha+\beta)=180°-90°=90°$.

Na isti način može se pokazati da je $|\measuredangle EFG|=|\measuredangle FGH|=|\measuredangle GHE|=90°$. 2 BODA

Četverokut *EFGH* je kvadrat jer ima sve stranice jednake duljine i sve kutove prave. 1 BOD

Zatamnjeni dio čini polovinu kvadrata *EFGH*.

Primjenom Pitagorinog poučka na trokut ΔHAE dobivamo $\left(\frac{1}{4}a\right)^2+\left(\frac{3}{4}a\right)^2=x^2$. 1 BOD

Nakon kvadriranja i zbrajanja slijedi $x^2=\frac{5}{8}a^2$. 1 BOD

Kako je $a^2=80$, (površina zadanog kvadrata), slijedi $x^2=\frac{5}{8}\cdot 80=50$. 1 BOD

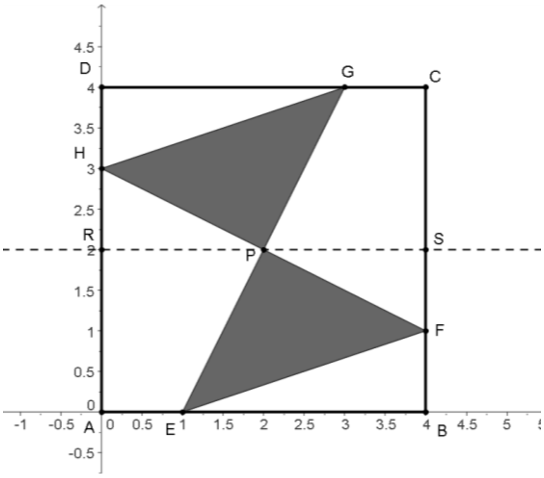
Površina kvadrata *EFGH* iznosi 50 cm^2, a zatamnjenog dijela 25 cm^2. 1 BOD

……………………...…………………………………………….……………… UKUPNO 10 BODOVA

Napomena: Rješenje bez dokaza da je četverokut *EFGH* kvadrat boduje se s najviše 6 bodova.

Drugi način:

Postavimo kvadrat $ABCD$ u pravokutni koordinatni sustav kao na slici.



1 BOD

Neka je a duljina stranice kvadrata.

Tada je $|AE| = |BF| = |CG| = |DH| = \frac{1}{4}a$, $|BE| = |CF| = |DG| = |AH| = \frac{3}{4}a$. 1 BOD

Vrijedi $EG \equiv y = 2x - 2$ i $FH \equiv y = -\frac{1}{2}x + 3$ 2 BODA

pa točka P kao presjek tih pravaca ima koordinate $P(2,2)$. 1 BOD

Dalje je $|HR| = |FS| = \frac{1}{4}a$ i $|RP| = |PS| = \frac{1}{2}a$. 1 BOD

Neka je P_1 površina trokuta DHG, P_2 površina trokuta HRP, P_3 površina trapeza $CGPS$,

P_K površina kvadrata $ABCD$ i P površina zatamnjenog dijela.

Vrijedi $P_1 = \dfrac{\frac{a}{4} \cdot \frac{3a}{4}}{2} = \frac{3}{32}a^2 = 7.5\,\text{cm}^2$, $P_2 = \dfrac{\frac{a}{4} \cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{1}{16}a^2 = 5\,\text{cm}^2$ i

$P_3 = \dfrac{\frac{a}{4} + \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{3}{16}a^2 = 15\,\text{cm}^2$. 3 BODA

S obzirom da je slika centralnosimetrična s obzirom na točku P, vrijedi

$P = P_K - 2 \cdot (P_1 + P_2 + P_3) = 80 - 2 \cdot 27.5 = 25\,\text{cm}^2$. 1 BOD

……………………...…………………………………….……………… UKUPNO 10 BODOVA