ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

5. razred – osnovna škola

14. ožujka 2025.

Ako učenik ima drugačiji postupak rješavanja zadatka, Povjerenstvo je dužno i taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak OŠ-5.1.

Tena je zamislila tri prirodna broja. Odredi sva tri broja ako je poznato sljedeće:

- prvi je broj najmanji parni četveroznamenkasti broj s različitim znamenkama;
- drugi je broj najveći četveroznamenkasti broj s različitim neparnim znamenkama koji nije djeljiv s tri;
- treći je broj jednak zbroju tri četvrtine prvoga i četiri sedmine drugoga broja.

Rješenje.

Kako bi prvi broj bio najmanji četveroznamenkasti broj s različitim znamenkama, znamenke tisućica, stotica i desetica su, redom, 1, 0 i 2. 2 boda

Znamenka jedinica mora biti 4 kako bi traženi broj bio paran pa je prvi broj 1024. 1 bod

Zatim, kako bi drugi broj bio najveći četveroznamenkasti broj s različitim neparnim znamenkama, znamenke tisućica, stotica i desetica su, redom, 9, 7 i 5. 2 boda

Kako je $9+7+5=21$, znamenka jedinica ne smije biti 3 jer drugi broj nije djeljiv s 3 pa mora biti 1. Dakle, drugi broj je 9751. 2 boda

Odredimo još treći broj. Četvrtina prvog broja je $1024:4=256$ pa tri četvrtine prvog broja iznose $256\cdot 3=768$. 1 bod

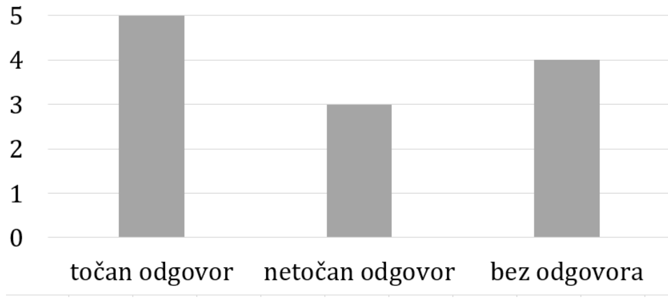
Sedmina drugog broja iznosi $9751:7=1393$ pa četiri sedmine drugog broja iznose $1393\cdot 4=5572$. 1 bod

Konačno, treći broj je $768+5572=6340$. 1 bod

Napomena: Ako su pogrešno određeni prvi ili drugi broj, pri određivanju trećeg broja učeniku se, od predviđena 3 boda, dodjeljuju najviše 2 boda na sljedeći način: 1 bod za određivanje tri četvrtine prvog broja ako je prvi broj djeljiv s 4, te 1 bod za određivanje četiri sedmine drugog broja ako je drugi broj djeljiv sa 7.

Zadatak OŠ-5.2.

Astra i Gea rješavale su ispit iz astronomije. Za svaki zadatak s točnim odgovorom daje se isti broj bodova. Za svaki zadatak bez odgovora oduzima se isti broj bodova. Za svaki zadatak s netočnim odgovorom oduzima se dvostruko više bodova nego za zadatak bez odgovora. Gea je u svim zadatcima dala točne odgovore i postigla 120 bodova. Astra je postigla ukupno 20 bodova te je dijagramom prikazano koliko je imala točnih i netočnih odgovora te na koliko zadataka nije dala odgovor. Koliko se bodova oduzima za svaki zadatak bez odgovora?



Prvo rješenje.

Na ispitu iz astronomije bilo je ukupno $5+3+4=12$ zadataka. 1 bod

Za svaki se zadatak s točnim odgovorom daje $120:12=10$ bodova. 1 bod

Astra je imala 5 točnih odgovora, pa je za njih dobila $5\cdot 10=50$ bodova. 1 bod

Kako je postigla ukupno 20 bodova, $50-20=30$ je bodova izgubila na netočne odgovore i zadatke bez odgovora. 1 bod

Kako je na tri zadatka dala netočan odgovor i na još četiri nije odgovorila, za svaki netočan odgovor oduzima se manje od 10 bodova. Broj bodova koji se oduzimaju za netočan odgovor mora biti paran; 2, 4, 6 ili 8 bodova. 2 boda

U tim slučajevima bi se za zadatak bez odgovora oduzimalo, redom, 1, 2, 3 ili 4 boda.
1 bod

bodovi koji se oduzimaju za netočan odgovor	2	4	**6**	8
bodovi koji se oduzimaju za zadatak bez odgovora	1	2	**3**	4
ukupno se oduzima Astri za netočne odgovore	6	12	**18**	24
ukupno se oduzima Astri za zadatke bez odgovora	4	8	**12**	16
ukupno se oduzima Astri	10	20	**30**	40
	nemoguće	nemoguće	**moguće**	nemoguće

3 boda

Za svaki zadatak bez odgovora oduzimaju se 3 boda.

Napomena: Za navedena tri nemoguća slučaja dodjeljuju se 2 boda (1 bod za dva, 2 boda za sva tri slučaja), a 1 bod se dodjeljuje za mogući slučaj, odnosno rješenje zadatka.

Drugo rješenje.

Na ispitu iz astronomije bilo je ukupno $5 + 3 + 4 = 12$ zadataka. 1 bod

Za svaki se točan odgovor daje $120 : 12 = 10$ bodova. 1 bod

Astra je imala 5 točnih odgovora, pa je za njih dobila $5 \cdot 10 = 50$ bodova. 1 bod

Neka je N broj bodova koji se oduzimaju za netočan odgovor, a X broj bodova koji se oduzimaju za zadatak bez odgovora.

Astra je postigla 20 bodova, pa je broj bodova koje je izgubila za netočne odgovore ili zadatke bez odgovora 30. 1 bod

Odnosno

$$3 \cdot N + 4 \cdot X = 30,$$ 2 boda

te $N = 2 \cdot X$. 1 bod

Stoga,

$$6X + 4X = 30$$ 1 bod

$$10X = 30$$ 1 bod

$$X = 3.$$ 1 bod

Za svaki zadatak bez odgovora oduzimaju se 3 boda.

Zadatak OŠ-5.3.

Koliko ima prirodnih brojeva oblika $\overline{2025abc}$ koji su djeljivi s 9, a čiji su ostatci pri dijeljenju brojem 2 i brojem 5 međusobno jednaki?

Prvo rješenje.

Ostatak pri dijeljenju s 2 može biti 1 ili 0, a ostatak pri dijeljenju s 5 može biti 0, 1, 2, 3 ili 4. Ako ostatci moraju biti međusobno jednaki, tada su to ostatci 0 i 1. 2 boda

I.slučaj

Ako je ostatak pri dijeljenju s 2 i s 5 jednak 0, zaključujemo da je broj djeljiv s 10 i posljednja znamenka traženog broja je $c = 0$.

Broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9, pa je $2+0+2+5+a+b+0 = 9 + a + b$, $9 + a + b \in \{9, 18, 27\}$, tj. $a + b \in \{0, 9, 18\}$. 1 bod

Ako je $a + b = 0$, tada je $a = b = 0$. Takav je **jedan broj**.

Ako je $a + b = 18$, tada je $a = b = 9$. Takav je **jedan broj**.

1 bod

Ako je $a+b = 9$, tada je $b = 9-a$. S obzirom da a može biti bilo koja od 10 znamenaka, takvih je **deset brojeva**. 1 bod

II.slučaj

Ako je ostatak pri dijeljenju s 2 jednak 1, znamenka c je neparna, tj. $c \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$. Ako je ostatak pri dijeljenju s 5 jednak 1, vrijedi $c \in \{1, 6\}$.

Zaključujemo da vrijedi $c = 1$. 1 bod

Broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9, pa je $2+0+2+5+a+b+1 = 10+a+b$, $10+a+b \in \{18, 27\}$, tj. $a+b \in \{8, 17\}$. 1 bod

Ako je $a+b=8$, tada je $b = 8-a$ pa a može biti bilo koja znamenka osim 9. Takvih je **devet brojeva**. 1 bod

Ako je $a+b=17$, takva su **dva broja** jer je $a=8$ i $b=9$ ili $a=9$ i $b=8$. 1 bod

Ukupno, traženih brojeva oblika $\overline{2025abc}$ ima 23. 1 bod

Drugo rješenje.

Promatramo brojeve oblika $\overline{2025abc}$ koji su višekratnici broja 9 te provjeravamo zadovoljavaju li uvjete zadatka, odnosno jesu li im ostatci pri dijeljenju brojem 2 i brojem 5 međusobno jednaki. Najmanji broj koji promatramo je 2025000, najveći 2025999, a među njima je 112 višekratnika broja 9 (to su brojevi oblika $2025000 + 9n$ za $n \in \{0, 1, \ldots, 111\}$). 2 boda

	broj	ostatak pri dijeljenju s 2	ostatak pri dijeljenju s 5	uvjeti zadovoljeni
1	**2025000**	**0**	**0**	**da**
2	2025009	1	4	ne
3	2025018	0	3	ne
4	2025027	1	2	ne
5	2025036	0	1	ne
6	2025045	1	0	ne
7	2025054	0	4	ne
8	2025063	1	3	ne
9	2025072	0	2	ne
10	**2025081**	**1**	**1**	**da**
11	**2025090**	**0**	**0**	**da**
12	2025099	1	4	ne
13	2025108	0	3	ne
14	2025117	1	2	ne
15	2025126	0	1	ne
16	2025135	1	0	ne
17	2025144	0	4	ne
18	2025153	1	3	ne
19	2025162	0	2	ne
20	**2025171**	**1**	**1**	**da**
21	**2025180**	**0**	**0**	**da**
22	2025189	1	4	ne
...	...	...	...	...
109	2025972	0	2	ne
110	**2025981**	**1**	**1**	**da**
111	**2025990**	**0**	**0**	**da**
112	2025999	1	4	ne

3 boda

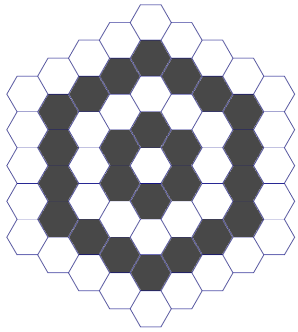
Uvjete zadovoljavaju 1., 10. i 11., 20. i 21., ... te 110. i 111. broj u tom nizu. 2 boda

Nakon prvog broja imamo ukupno 11 parova, odnosno 22 broja. 2 boda

Ukupno, traženih brojeva oblika $\overline{2025abc}$ ima 23. 1 bod

Zadatak OŠ-5.4.

Na gradskom trgu postavljen je mozaik od jednakih pločica oblika pravilnog šesterokuta. U prvom je koraku na središtu trga postavljena jedna bijela pločica. U drugom su koraku oko nje postavljene crne pločice, njih šest. U trećem su koraku oko njih postavljene bijele pločice, itd. U svakom su sljedećem koraku oko prethodno postavljenih pločica postavljene pločice druge boje, naizmjence bijele i crne boje. Slika prikazuje izgled mozaika nakon pet koraka.



Postupak je nastavljen na opisani način dok nije provedeno ukupno 2025 koraka. Time je mozaik dovršen. Za koliko je broj bijelih pločica u gotovom mozaiku veći od broja crnih pločica?

Prvo rješenje.

U prvom je koraku jedna bijela pločica, u trećem je dodano $12 = 2 \cdot 6$, a u petom $24 = 4 \cdot 6$ bijele pločice. 1 bod

Broj bijelih pločica u 2025. koraku je

$$1 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + \ldots + 2024 \cdot 6.$$ 2 boda

U drugom je koraku oko prve bijele dodano $6 = 1 \cdot 6$, a u četvrtom $18 = 3 \cdot 6$ crnih pločica. 1 bod

Broj crnih pločica u 2025. koraku je

$$1 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 6 + \ldots + 2023 \cdot 6.$$ 2 boda

Razlika broja bijelih i broja crnih pločica je:

$$1 + (2-1) \cdot 6 + (4-3) \cdot 6 + (6-5) \cdot 6 + \ldots + (2024-2023) \cdot 6 =$$ 2 boda

$$= 1 + 1012 \cdot 6 = 6073.$$ 2 boda

Napomena:

Učenik može izračunati ukupan broj bijelih pločica (6150937), 4 boda

broj crnih pločica (6144864), 4 boda

a zatim odrediti njihovu razliku (6073). 2 boda

Drugo rješenje.

U drugom koraku dodano je 6 crnih, u trećem 12 bijelih, u četvrtom 18 crnih, a u petom 24 bijelih pločica. 2 boda

U svakom koraku, nakon drugog, broj dodanih pločica je za 6 veći od broja dodanih pločica u prethodnom koraku. Stoga je razlika broja zadnje dodanih bijelih i prethodno dodanih crnih pločica uvijek 6. 2 boda

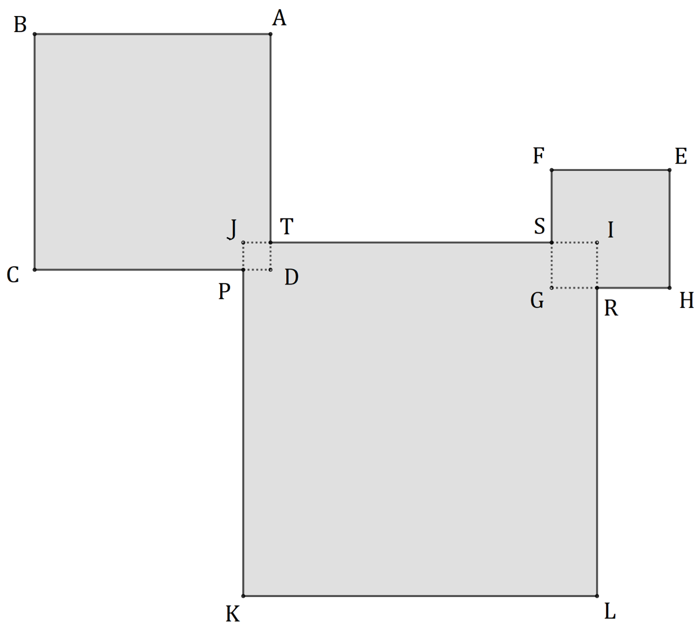
Crne i bijele pločice, nakon prvog koraka, dodavane su naizmjence 2024 puta (1012 puta bijele, a 1012 puta crne), 2 boda

što znači da je broj bijelih za $1012 \cdot 6 = 6072$ veći od broja crnih pločica. 2 boda

Nakon dodavanja jedne bijele pločice iz prvog koraka u gotovom mozaiku ukupan broj bijelih pločica veći je od ukupnog broja crnih pločica za $6072 + 1 = 6073$. 2 boda

Zadatak OŠ-5.5.

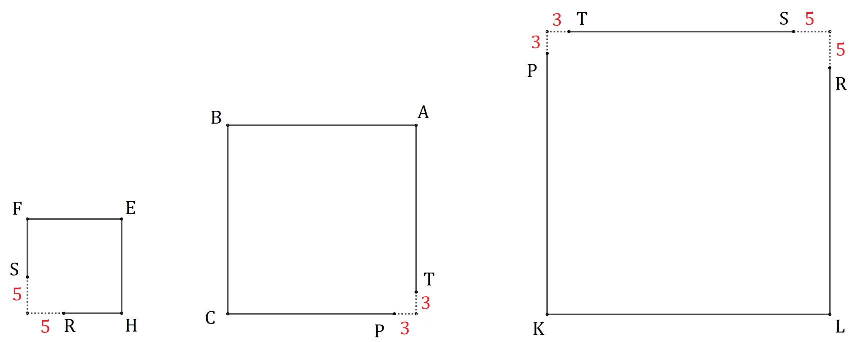
Na veliki papir zalijepljeni su kvadrati $ABCD$, $EFGH$ i $IJKL$ kao što je prikazano na slici. Stranica kvadrata $ABCD$ dva je puta dulja od stranice kvadrata $EFGH$. Stranica kvadrata $IJKL$ tri je puta dulja od stranice kvadrata $EFGH$. Točke u kojima se sijeku rubovi kvadrata točke su P, R, S i T. Presjek kvadrata $ABCD$ i $IJKL$ kvadrat je $TJPD$ površine 9. Presjek kvadrata $IJKL$ i $EFGH$ kvadrat je $ISGR$ površine 25. Ako je opseg lika $ABCPKLRHEFST$ jednak 280, odredi površinu toga lika.



Prvo rješenje.

Kvadrat kojemu je površina 9 ima stranicu duljine 3, a kvadrat kojemu je površina 25 ima stranicu duljine 5. 1 bod

Rub lika $ABCPKLRHEFST$ sastoji se od tri dijela, kao što je prikazano na donjoj slici.



Neka je x duljina stranice kvadrata $EFGH$. Tada su duljine stranica kvadrata $ABCD$ i $IJKL$, redom, $2x$ i $3x$.

Opseg lika $ABCPKLRHEFST$ jednak je zbroju:

- opsega kvadrata $EFGH$ umanjenog za duljine dviju stranica kvadrata čija je površina 25, odnosno $4x - 10$, 1 bod
- opsega kvadrata $ABCD$ umanjenog za duljine dviju stranica kvadrata čija je površina 9, odnosno $4 \cdot 2x - 6 = 8x - 6$, 1 bod
- opsega kvadrata $IJKL$ umanjenog za duljine dviju stranica kvadrata čija je površina 9 i duljine dviju stranica kvadrata čija je površina 25, odnosno $4 \cdot 3x - 16 = 12x - 16$, 2 boda

tj. opsega sva tri kvadrata umanjenog za 32

$$4x - 10 + 8x - 6 + 12x - 16 = 280$$

$$24x - 32 = 280$$

$$24x = 312$$

$$x = 13.$$ 2 boda

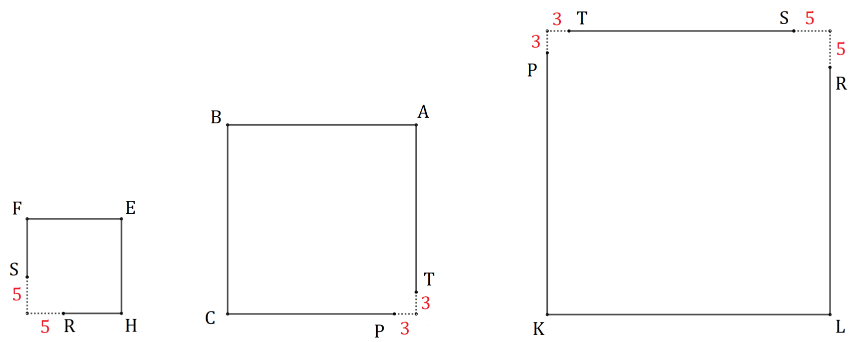
Površina lika $ABCPKLRHEFST$ jednaka je zbroju površina kvadrata $EFGH$, $ABCD$ i $IJKL$ umanjenom za $9 + 25 = 34$, 1 bod

$$P = 13 \cdot 13 + 26 \cdot 26 + 39 \cdot 39 - 34 = 169 + 676 + 1521 - 34 = 2332.$$ 2 boda

Drugo rješenje.

Kako je presjek kvadrata $EFGH$ i $IJKL$ kvadrat čija je površina 25, odnosno čija je stranica duljine 5, zaključujemo da duljina stranica kvadrata $EFGH$ mora biti veća od 5. 1 bod

Rub lika $ABCPKLRHEFST$ sastoji se od tri dijela, kao što je prikazano na donjoj slici.



Kako je $5+5+3+3+3+3+5+5=32$, opseg lika $ABCPKLRHEFST$ jednak je zbroju opsega sva tri kvadrata umanjenom za 32. 2 boda

Do rješenja se može doći promatranjem opsega kvadrata i opsega traženog lika.

duljina stranice kvadrata			opseg kvadrata			opseg lika	
$EFGH$	$ABCD$	$IJKL$	$EFGH$	$ABCD$	$IJKL$	$ABCPKLRHEFST$	
6	12	18	24	48	72	112	premalo
7	14	21	28	56	84	136	premalo
...	...	...	...	...	...	...	...
12	24	36	48	96	144	256	premalo
13	26	39	52	104	156	**280**	✓
14	28	42	56	112	168	304	previše
15	30	45	60	120	180	328	previše
...	...	...	...	...	...	...	...

4 boda

Zaključujemo da je duljina stranice kvadrata $EFGH$ jednaka 13. 1 bod

Površina lika $ABCPKLRHEFST$ jednaka je zbroju površina kvadrata $EFGH$, $ABCD$ i $IJKL$ umanjenom za $9+25=34$, odnosno

$$P = 13\cdot 13 + 26\cdot 26 + 39\cdot 39 - 34 = 169 + 676 + 1521 - 34 = 2332.$$ 2 boda

Napomena: Kako bi učeniku bila dodijeljena 4 boda za tablicu potrebno je pokazati da je rješenje jedinstveno tj. obrazložiti kako nema drugih rješenja. Jedinstvenost rješenja može se argumentirati uočavanjem rasta (pada) opsega s obzirom na rast (pad) duljina stranica kvadrata. Učenik može i ispisivati slučajeve kada je stranica prvog kvadrata manja (veća) od 13, te na taj način argumentirati smanjenje (povećanje) opsega.