ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

6. razred – osnovna škola

14. ožujka 2025.

Ako učenik ima drugačiji postupak rješavanja zadatka, Povjerenstvo je dužno i taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak OŠ-6.1.

Marko je s balkona pustio loptu da pada prema ravnome tlu. Nakon svakoga odbijanja od tla lopta odskoči i dosegne $\frac{2}{5}$ prethodne visine. Ako je u trećemu odskoku dostigla visinu od 80 cm, odredi u metrima duljinu ukupnoga puta koji će lopta prijeći od trenutka kad ju je Marko ispustio do trenutka kad peti put dodirne tlo.

Prvo rješenje.

Lopta je u trećem odskoku dosegla visinu od 80 cm što je $\frac{2}{5}$ visine s koje je pala.

$$80 : \frac{2}{5} = 200 \quad \text{ili} \quad \begin{array}{l} \frac{2}{5} \text{ je } 80 \\ \frac{1}{5} \text{ je } 40 \\ \frac{5}{5} \text{ je } 200 \end{array}$$

U trećem je padu pala s visine od 200 cm. 2 boda

U drugom je odskoku dosegla visinu od 200 cm što je $\frac{2}{5}$ visine s koje je pala.

$$200 : \frac{2}{5} = 500 \quad \text{ili} \quad \begin{array}{l} \frac{2}{5} \text{ je } 200 \\ \frac{1}{5} \text{ je } 100 \\ \frac{5}{5} \text{ je } 500 \end{array}$$

U drugom je padu pala s visine od 500 cm. 2 boda

U prvom je odskoku dosegla visinu od 500 cm što je $\frac{2}{5}$ visine s koje je pala.

$$500 : \frac{2}{5} = 1250 \quad \text{ili} \quad \begin{array}{l} \frac{2}{5} \text{ je } 500 \\ \frac{1}{5} \text{ je } 250 \\ \frac{5}{5} \text{ je } 1250 \end{array}$$

Lopta je na početku pala s visine od 1250 cm. 2 boda

U četvrtom je padu pala s visine od 80 cm.

U četvrtom je odskoku dosegla visinu od $\frac{2}{5}$ od $80 = 32$ cm što odgovara i duljini pada kada peti put dodirne tlo. 1 bod

Ukupna duljina puta iznosi $1250 + 2 \cdot 500 + 2 \cdot 200 + 2 \cdot 80 + 2 \cdot 32$, 1 bod

tj. 2874 cm. 1 bod

U metrima duljina puta iznosi 28.74 m. 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je x visina s koje je Marko ispustio loptu.

U prvom odskoku lopta je dosegla visinu $\frac{2}{5}$ od x odnosno $\frac{2}{5}x$. 1 bod

U drugom odskoku je dosegla visinu $\frac{2}{5}$ od $\frac{2}{5}x$ odnosno $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}x = \frac{4}{25}x$. 1 bod

U trećem odskoku je dosegla visinu $\frac{2}{5}$ od $\frac{4}{25}x$ odnosno $\frac{2}{5} \cdot \frac{4}{25}x = \frac{8}{125}x$. 1 bod

Uvrštavanjem dobijemo jednadžbu $\frac{8}{125}x = 80$, čije je rješenje $x = 1250$.

Marko je ispustio loptu s visine od 1250 cm. 1 bod

U prvom je odskoku dosegla visinu od $\frac{2}{5} \cdot 1250 = 500$ cm što odgovara i duljini pada kada drugi put dodirne tlo. 1 bod

U drugom je odskoku dosegla visinu od $\frac{2}{5} \cdot 500 = 200$ cm što odgovara i duljini pada kada treći put dodirne tlo. 1 bod

U trećem odskoku lopta je dosegla visinu od 80 cm (kako je zadano zadatkom) pa je u četvrtom odskoku dostigla visinu od $\frac{2}{5}$ od $80 = 32$ cm što odgovara i duljini pada kada peti put dodirne tlo. 1 bod

Ukupna duljina puta iznosi $1250 + 2 \cdot 500 + 2 \cdot 200 + 2 \cdot 80 + 2 \cdot 32$, 1 bod

tj. 2874 cm. 1 bod

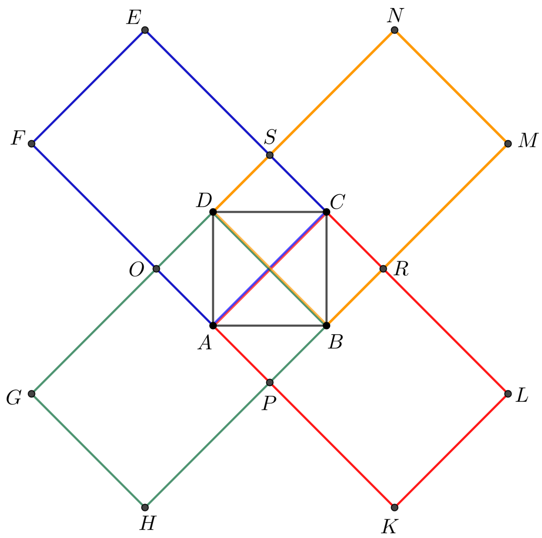
U metrima duljina puta iznosi 28.74 m. 1 bod

Zadatak OŠ-6.2.

Neka je $ABCD$ kvadrat duljine dijagonale 10 cm. Pravokutnici $ACEF$, $AKLC$, $BDGH$ i $BMND$ sukladni su i dulja stranica im je za 60 % dulja od stranice duljine 10 cm. Unija tih četiriju pravokutnika lik je u obliku križa. Odredi opseg i površinu toga lika.

Rješenje.

Skica 2 boda



Vrijedi $|AC| = |KL| = |FE| = |BD| = |GH| = |MN| = 10$ cm.

Dulja stranica pravokutnika iznosi $1.6 \cdot 10 = 16$ cm. 1 bod

Opseg – prvi način:

$|AK| = |CL| = |AF| = |CE| = |BH| = |DG| = |BM| = |DN| = 16$ cm.

$|AP| = 5$ cm i $|AK| = 16$ cm pa je $|PK| = 16 - 5 = 11$ cm. 1 bod

$|PK| = |RL| = |OF| = |SE| = |PH| = |OG| = |RM| = |SN| = 11$ cm.

Opseg lika iznosi $8 \cdot 11 + 4 \cdot 10 = 128$ cm. 2 boda

Opseg – drugi način:

Pravokutnici na slici su sukladni, a opseg svakog od njih je $2 \cdot 10 + 2 \cdot 16 = 52$ cm.

Zbroj opsega tih četiriju pravokutnika je $4 \cdot 52 = 208$ cm. 1 bod

Da bismo dobili opseg lika koji je unija ta četiri pravokutnika moramo oduzeti četiri duljine dijagonale kvadrata $ABCD$ i opseg kvadrata $OPRS$.

Opseg lika iznosi $208 - 4 \cdot 10 - 4 \cdot 10 = 128$ cm. 2 boda

Površina – prvi način:

Površinu lika možemo izračunati zbrajanjem površine kvadrata $OPRS$ i četiri sukladna pravokutnika $PKLR$, $RMNS$, $SEFO$ i $OGHP$.

Površina kvadrata iznosi $10 \cdot 10 = 100$ cm^2. 1 bod

Površina pravokutnika iznosi $11 \cdot 10 = 110$ cm^2. 1 bod

Površina lika iznosi $100 + 4 \cdot 110 = 540$ cm^2. 2 boda

Površina – drugi način:

Površinu lika možemo izračunati zbrajanjem površina četiri sukladna pravokutnika $AKLC$, $BMND$, $CEFA$ i $DGHB$ od čega oduzmemo površinu kvadrata $OPRS$.

Površina kvadrata iznosi $10 \cdot 10 = 100 \text{ cm}^2$. 1 bod

Površina pravokutnika iznosi $16 \cdot 10 = 160 \text{ cm}^2$. 1 bod

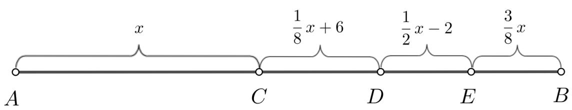
Površina lika iznosi $4 \cdot 160 - 100 = 540 \text{ cm}^2$. 2 boda

Napomena: Ako učenik izračuna točan opseg i površinu lika na način koji nije prikazan u rješenju, ali uz objašnjenje postupka, za svaki od točnih izračuna dobiva 3 boda za opseg, odnosno 4 boda za površinu. Bez objašnjenja postupka, točan iznos opsega i površine nose po 1 bod.

Zadatak OŠ-6.3.

Na dužini $\overline{AB}$, počevši od točke A, odabrane su redom točke C, D i E tako da je dužina $\overline{CD}$ za 6 cm dulja od $\frac{1}{8}$ dužine $\overline{AC}$, dužina $\overline{DE}$ za 2 cm kraća je od $\frac{1}{2}$ dužine $\overline{AC}$, a duljina dužine $\overline{EB}$ jest $\frac{3}{8}$ duljine dužine $\overline{AC}$. Kolika je duljina dužine $\overline{AB}$ ako je udaljenost polovišta dužina $\overline{CD}$ i $\overline{EB}$ jednaka 13 cm?

Rješenje.



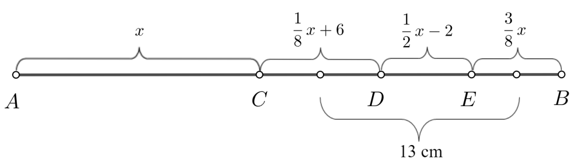
Neka je $x = |AC|$.

Slijedi da je

$$|CD| = \frac{1}{8}x + 6$$ 1 bod

$$|DE| = \frac{1}{2}x - 2$$ 1 bod

$$|EB| = \frac{3}{8}x$$ 1 bod



Udaljenost polovišta dužina $\overline{CD}$ i $\overline{EB}$ iznosi $\frac{1}{2} \cdot |CD| + |DE| + \frac{1}{2} \cdot |EB|$.

Budući da vrijedi $\frac{1}{2} \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{8}x + 6\right) = \frac{1}{16}x + 3$, 1 bod te $\frac{1}{2} \cdot |EB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8}x = \frac{3}{16}x$ 1 bod

nepoznanicu x računamo iz jednadžbe $\frac{1}{16}x + 3 + \frac{1}{2}x - 2 + \frac{3}{16}x = 13$.

Dobivamo $x = 16$. 2 boda

Slijedi $|CD| = \frac{1}{8}x + 6 = 2 + 6 = 8$, $|DE| = \frac{1}{2}x - 2 = 8 - 2 = 6$, $|EB| = \frac{3}{8}x = 6$. 2 boda

Duljina dužine $\overline{AB}$ iznosi $16 + 8 + 6 + 6 = 36$ cm. 1 bod

Zadatak OŠ-6.4.

Ana ima četiri kuglice različitih boja: plavu, crvenu, zelenu i žutu. Treba ih rasporediti u kutije označene brojevima od 1 do 5 tako da su u jednoj kutiji najviše dvije kuglice. Na koliko načina Ana može rasporediti kuglice u kutije?

Rješenje.

Imamo 3 slučaja: svaka kuglica je u svojoj kutiji, dvije kuglice su u jednoj kutiji i preostale dvije su svaka u svojoj kutiji, te po dvije kuglice su zajedno u kutiji. 1 bod

1. slučaj: svaka kuglica je u svojoj kutiji.

Prvu kuglicu može smjestiti u bilo koju od pet kutija, drugu kuglicu u bilo koju od preostale četiri kutije itd. Tada je broj mogućih rasporeda $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$. 2 boda

2. slučaj: dvije kuglice su u jednoj kutiji, a preostale dvije su svaka u svojoj kutiji.

Prvu kuglicu za prvu kutiju možemo izabrati na 4 načina, drugu na 3 načina. To je $4 \cdot 3 = 12$ načina. Nije nam važan poredak pa još moramo podijeliti s 2. Dvije kuglice koje će biti zajedno u istoj kutiji možemo izabrati na $4 \cdot 3 : 2 = 6$ načina. 1 bod

Za svaki od tih odabira moramo još odabrati 3 kutije (za te dvije kuglice i preostale dvije kuglice), a to ćemo učiniti na $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ načina. 1 bod

Ukupan broj rasporeda u navedenom slučaju je $6 \cdot 60 = 360$. 1 bod

3. slučaj: po dvije kuglice su zajedno u kutiji.

Primijetimo da je dovoljno odrediti broj načina da za jednu kuglicu odaberemo s kojom će kuglicom biti u kutiji jer je tada i preostali par određen. Pri tom nam nije bitan poredak, tj. koji je par prvi, a koji drugi. Npr. za plavu kuglicu može se odabrati na tri načina s kojom će kuglicom biti u kutiji, dakle, postoje 3 načina za odabir dva para kuglica. 1 bod

Za svaki od tih odabira dvije kutije u kojima će biti kuglice možemo odabrati na $5 \cdot 4 = 20$ načina. 1 bod

Dakle, ukupan broj raspreda u ovom slučaju je $3 \cdot 20 = 60$. 1 bod

Konačno, broj svih mogućih rasporeda iznosi $120 + 360 + 60 = 540$. 1 bod

Napomena: Za prvi bod nije nužno da sva tri slučaja budu navedena u istoj rečenici, već je dovoljno da učenik razmatra navedena tri slučaja.

Napomena: U svakom od tri slučaja možemo prvo prebrojiti broj načina da rasporedimo kuglice koje ne razlikujemo, a nakon toga pridružimo boje kuglicama. Redom po slučajevima zapisujemo te brojeve kao umnoške: $5 \cdot 24$, $30 \cdot 12$, $10 \cdot 6$. Prebrojavanje rasporeda kuglica iste boje daje rezultat $5 + 30 + 10 = 45$ koji uz objašnjenje nosi 5 bodova (1 bod za slučajeve, po 1 bod za svaki slučaj, 1 bod za zbroj), a bez objašnjenja 2 boda. Ako učenik taj rezultat pomnoži s 24 uz objašnjenje da na taj način određuje boje (pritom zanemarujući da u nekim slučajevima nije bitan poredak kuglica unutar kutije) dobiva još 1 bod. Ispravno prebrojavanje načina na koje možemo pridružiti boje nosi 1 bod u prvom slučaju, a po 2 boda u drugom i trećem slučaju.

Zadatak OŠ-6.5.

Neka su a, b, c i d prirodni brojevi za koje vrijedi

$$a < b < c < d \quad \text{i} \quad V(a, b, c, d) = 120.$$

Najmanji od tih brojeva ima dva djelitelja, a svaki sljedeći dva djelitelja više nego prethodni. Ako je još poznato da vrijedi $V(a, b) = b$, $V(a, c) = c$, $V(a, d) = d$ i $V(b, d) \neq d$, odredi sve mogućnosti za četvorku brojeva (a, b, c, d).

$V(a, b, c, d)$ je najmanji zajednički višekratnik brojeva a, b, c i d.

Prvo rješenje.

Brojevi a, b, c, d su djelitelji broja 120 pa se nalaze u skupu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120\}$. 1 bod

Broj a ima dva djelitelja pa je $a \in \{2, 3, 5\}$.

Broj b ima četiri djelitelja pa je $b \in \{6, 8, 10, 15\}$.

Broj c ima šest djelitelja pa je $c \in \{12, 20\}$.

Broj d ima osam djelitelja pa je $d \in \{24, 30, 40\}$. 2 boda

Iz uvjeta $V(a, b) = b, V(a, c) = c, V(a, d) = d$ zaključujemo da je broj a djelitelj brojeva b, c i d. Iz uvjeta $V(b, d) \neq d$ zaključujemo da broj b nije djelitelj broja d. 1 bod

Za $a = 2$, vrijedi $b \in \{6, 8, 10\}$, $c \in \{12, 20\}$, $d \in \{24, 30, 40\}$.

Kako b nije djelitelj broja d, za $b = 6$ jedina mogućnost je $d = 40$, za $b = 8$ jedina mogućnost je $d = 30$ i za $b = 10$ jedina mogućnost je $d = 24$. 1 bod

Rješenja su uređene četvorke $(2, 6, 12, 40)$, $(2, 6, 20, 40)$, $(2, 8, 12, 30)$, $(2, 8, 20, 30)$, $(2, 10, 12, 24)$, $(2, 10, 20, 24)$. 1 bod

Za $a = 3$, vrijedi $b \in \{6, 15\}$, $c = 12$, $d \in \{24, 30\}$.

Zbog uvjeta $b < c$ jedina mogućnost je $b = 6$, ali tada ne postoji broj d koji nije djeljiv sa 6. Ovaj slučaj nema rješenja. 2 boda

Za $a = 5$, vrijedi $b \in \{10, 15\}$, $c = 20$, $d \in \{30, 40\}$. Zbog uvjeta da broj b nije djelitelj broja d, zaključujemo da je $b = 15$ i $d = 40$. Dobivamo rješenje $(5, 15, 20, 40)$. 2 boda

Drugo rješenje.

Rastavimo broj 120 na proste faktore: $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Iz rastava broja 120 na proste faktore i činjenice da broj a ima samo dva djelitelja, zaključujemo da a može biti 2, 3 ili 5. 1 bod

1. slučaj: $a = 2$

Budući da je $V(a, b) = b$ i b ima 4 djelitelja, rastav broja b na proste faktore može biti $2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$ ili $2 \cdot 2 \cdot 2$. 1 bod

Budući da je $V(a, c) = c$ i c ima 6 djelitelja, rastav broja c na proste faktore može biti $2 \cdot 2 \cdot 3$ ili $2 \cdot 2 \cdot 5$. 1 bod

Budući da je $V(a, d) = d$ i d ima 8 djelitelja, rastav broja d na proste faktore može biti $2 \cdot 3 \cdot 5$, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ ili $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$. 1 bod

Zadano je da je $V(b, d) \neq d$ pa zaključujemo da mora biti

$b = 2 \cdot 3 = 6$ i $d = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$,

$b = 2 \cdot 5 = 10$ i $d = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ ili

$b = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ i $d = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. 1 bod

Imamo mogućnosti $V(2, 6, c, 40) = 120$, $V(2, 10, c, 24) = 120$ i $V(2, 8, c, 30) = 120$, pa c u svim tim mogućnostima može biti 12 ili 20. Moguća rješenja su: $(2, 6, 12, 40)$, $(2, 6, 20, 40)$, $(2, 10, 12, 24)$, $(2, 10, 20, 24)$, $(2, 8, 12, 30)$, $(2, 8, 20, 30)$. 1 bod

2. slučaj: $a = 3$

Budući da je $V(a, b) = b$ i b ima 4 djelitelja, rastav broja b na proste faktore može biti $2 \cdot 3$ ili $3 \cdot 5$.

Budući da je $V(a, c) = c$ i c ima 6 djelitelja, rastav broja c mora biti $2 \cdot 2 \cdot 3$, to jest $c = 12$.

Budući da je $V(a, d) = d$ i d ima 8 djelitelja, rastav broja d mora biti $2 \cdot 3 \cdot 5$, to jest $d = 30$. No, budući da mora vrijediti $V(b, d) \neq d$, ovaj slučaj nema rješenja. 2 boda

3. slučaj: $a = 5$

Budući da je $V(a, b) = b$ i b ima 4 djelitelja, rastav broja b na proste faktore može biti $2 \cdot 5$ ili $3 \cdot 5$.

Budući da je $V(a, c) = c$ i c ima 6 djelitelja, rastav broja c mora biti $2 \cdot 2 \cdot 5$.

Budući da je $V(a, d) = d$ i d ima 8 djelitelja, rastav broja d mora biti $2 \cdot 3 \cdot 5$ ili $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$.

Iz $V(b, d) \neq d$ slijedi da mora biti $b = 3 \cdot 5 = 15$ i $d = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 40$.

U ovom slučaju dobivamo rješenje $(5, 15, 20, 40)$. 2 boda

Napomena: Svaka uređena četvorka nosi 1 bod uz obrazloženje, a ako učenik nema obrazloženja za svake dvije točno određene uređene četvorke učenik dobiva po 1 bod. Ako učenik odredi svih sedam uređenih četvorki, ali nema obrazloženja zašto su to jedine mogućnosti može dobiti najviše 4 boda.