ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

7. razred – osnovna škola

14. ožujka 2025.

Ako učenik ima drugačiji postupak rješavanja zadatka, Povjerenstvo je dužno i taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak OŠ-7.1.

Tri volontera za dva sata napune 40 vreća s pijeskom za obranu od poplave. Za koliko bi sekunda 16 volontera napunilo 60 takvih vreća ako cijelo vrijeme rade istom brzinom?

Prvo rješenje.

Tri volontera za dva sata napune 40 vreća.

Broj vreća trebamo povećati s 40 na 60, tj. $\frac{3}{2}$ puta. 1 bod

Toliko puta će se povećati i broj sati potrebnih da se vreće napune, uz jednak broj volontera: $\frac{3}{2} \cdot 2 = 3$. Dakle, tri volontera za tri sata napune 60 vreća. 2 boda

Više volontera će isti broj vreća napuniti za manje sati, odnosno broj volontera i potrebno vrijeme su obrnuto proporcionalne veličine.

Ako broj volontera povećamo $\frac{16}{3}$ puta, potrebno vrijeme će se smanjiti $\frac{16}{3}$ puta. 1 bod

Dobivamo $3 : \frac{16}{3} = 3 \cdot \frac{3}{16} = \frac{9}{16}$ sati. 2 boda

Jedan sat ima 3600 sekundi. 1 bod

Dobivamo $\frac{9}{16} \cdot 3600 = 9 \cdot 225 = 2025$ sekundi. 2 boda

Dakle, 16 volontera će za 2025 sekundi napuniti 60 vreća pijeskom. 1 bod

Drugo rješenje.

Tri volontera za dva sata napune 40 vreća.

Ako svi volonteri rade istom brzinom, onda 1 volonter za 2 sata napuni $\frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$ vreća. 1 bod

Jedan sat ima 3600 sekundi. 1 bod

Dakle, jedan volonter napuni $\frac{40}{3}$ vreća za 7200 sekundi. 1 bod

Da bi napunio jednu vreću, volonteru treba

$7200 : \frac{40}{3} = 7200 \cdot \frac{3}{40} = 180 \cdot 3 = 540$ sekundi (to je 9 minuta). 2 boda

Za 60 vreća trebalo bi mu $540 \cdot 60 = 32400$ sekundi. 2 boda

Ako posao obavlja 16 volontera, trebat će im 16 puta manje vremena. 1 bod

$32400 : 16 = 2025$ 1 bod

Dakle, 16 volontera će za 2025 sekundi napuniti 60 vreća pijeskom. 1 bod

Zadatak OŠ-7.2.

Dunja, Višnja i Jagoda jele su voćnu tortu. Dunja je pojela 20 % više od Višnje, a Jagoda 25 % manje od Dunje. Nisu sve mogle pojesti, pa je ostao komad torte. Da je Dunja pojela 25 % više, Višnja 20 % više, a Jagoda 100 % više od onoga što je pojela, ne bi ostalo ništa. Koliki je udio torte svaka djevojčica pojela i koliko je ostalo? Odgovore zapiši u obliku razlomka.

Rješenje.

Označimo s x dio koji je pojela Višnja.

Dunja je pojela 20 % više, znači da je pojela $1.2x$. 1 bod

Jagoda je pojela 25% manje od Dunje, znači da je pojela $0.75 \cdot 1.2x = 0.9x$. 1 bod

Da je Dunja pojela 25% više, pojela bi $1.25 \cdot 1.2x = 1.5x$. 1 bod

Da je Višnja pojela 20% više, pojela bi $1.2x$. 1 bod

Da je Jagoda pojela 100% više, pojela bi $2 \cdot 0.9x = 1.8x$. 1 bod

Zajedno bi pojele $1.5x + 1.2x + 1.8x = 1$ (cijelu tortu). 1 bod

Vrijedi $4.5x = 1$, odnosno $x = \frac{1}{4.5} = \frac{2}{9}$. Dakle, Višnja je pojela $\frac{2}{9}$ torte. 1 bod

Dunja je pojela $1.2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{12}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{15}$ torte. 1 bod

Jagoda je pojela $0.9 \cdot \frac{2}{9} = \frac{9}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{5}$ torte. 1 bod

Ostalo je $1 - \left(\frac{2}{9} + \frac{4}{15} + \frac{1}{5}\right) = 1 - \frac{20+24+18}{90} = 1 - \frac{62}{90} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}$ torte. 1 bod

Zadatak OŠ-7.3.

Za prirodne brojeve a i b vrijedi

$$a + ab + b = 441.$$

Odredi sve mogućnosti umnoška ab.

Prvo rješenje.

Vrijedi sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned} a + ab + b &= 441 \\ a + ab + b + 1 &= 442 \\ b(a+1) + a + 1 &= 442 \\ (a+1)(b+1) &= 442 \end{aligned}$$

3 boda

Broj 442 rastavljamo na proste faktore: $442 = 2 \cdot 13 \cdot 17$ 2 boda

Broj 442 možemo prikazati kao umnožak dva prirodna broja na sljedeće načine:

$442 = 1 \cdot 442 = 2 \cdot 221 = 13 \cdot 34 = 17 \cdot 26.$ 2 boda

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a < b$, jer se traži umnožak ab.

Rastav $442 = 1 \cdot 442$ ne daje prirodne brojeve a i b, a iz ostalih rastava imamo sljedeće mogućnosti:

$a = 1,\ b = 220,\ ab = 220$ 1 bod

$a = 12,\ b = 33,\ ab = 396$ 1 bod

$a = 16,\ b = 25,\ ab = 400$ 1 bod

Drugo rješenje.

Vrijedi sljedeći niz jednakosti:

$$\begin{aligned}
a + ab &= 441 - b \\
a(1+b) &= 441 - b / : (1+b),\ b \neq -1 \\
a &= \frac{441-b}{1+b} \\
a &= \frac{441-b}{1+b} = \frac{-b-1+442}{b+1} = \frac{-(b+1)+442}{b+1} = -1 + \frac{442}{b+1}
\end{aligned}$$

3 boda

Broj 442 rastavljamo na proste faktore: $442 = 2 \cdot 13 \cdot 17$ 2 boda

Broj 442 možemo prikazati kao umnožak dva prirodna broja na sljedeće načine:

$442 = 1 \cdot 442 = 2 \cdot 221 = 13 \cdot 34 = 17 \cdot 26$ 2 boda

Broj $b + 1$ mora biti djelitelj broja 442 da bi a bio cijeli broj, ali, kako je $a, b \in \mathbb{N}$, promatramo sljedeće mogućnosti:

$b+1$	b	a	ab
2	1	220	220
221	220	1	220
13	12	33	396
34	33	12	396
17	16	25	400
26	25	16	400

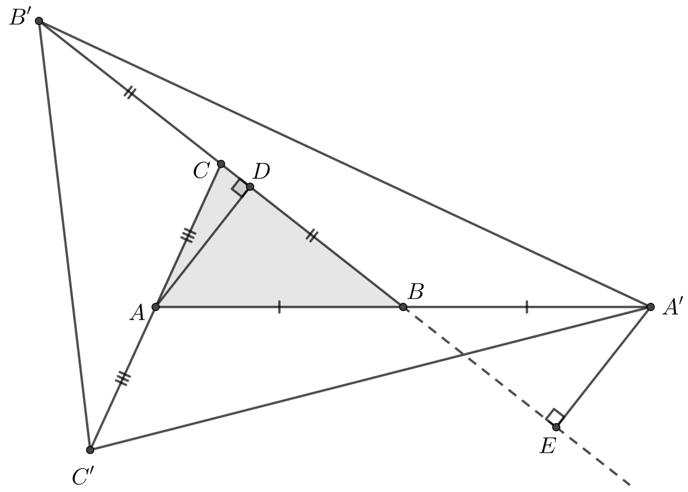
Umnožak ab može biti 220, 396 ili 400. 3 boda

Zadatak OŠ-7.4.

Na produžetku stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC preko vrha B označena je točka A' takva da je $|AB| = |BA'|$. Na produžetku stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC preko vrha C označena je točka B' takva da je $|BC| = |CB'|$, a na produžetku stranice $\overline{CA}$ trokuta ABC preko vrha A označena je točka C' takva da je $|CA| = |AC'|$. Koliko je puta površina trokuta $A'B'C'$ veća od površine trokuta ABC?

Prvo rješenje.

Skica:



1 bod

Neka je točka D nožište visine trokuta ABC iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$, a točka E nožište visine trokuta $BA'B'$ iz vrha A' na pravac BC.

Trokuti ABD i $A'BE$ su sukladni pravokutni trokuti po poučku KSK 1 bod

jer vrijedi $|AB| = |BA'|$ 1 bod

i imaju dva para sukladnih kutova (pravi kutovi kod vrhova D i E te vršni kutovi s vrhom B). 1 bod

Iz sukladnosti tih trokuta slijedi $|AD| = |EA'| = v_a$. 1 bod

Površina trokuta ABC jednaka je

$$P_{ABC} = \frac{|BC| \cdot |AD|}{2} = \frac{a \cdot v_a}{2},$$

1 bod

a površina trokuta $BA'B'$ je

$$P_{BA'B'} = \frac{|BB'| \cdot |EA'|}{2} = \frac{2a \cdot v_a}{2} = 2P_{ABC}$$

1 bod

Na isti se način može pokazati da je $P_{CB'C'} = 2P_{ABC}$ i $P_{A'AC'} = 2P_{ABC}$. 2 boda

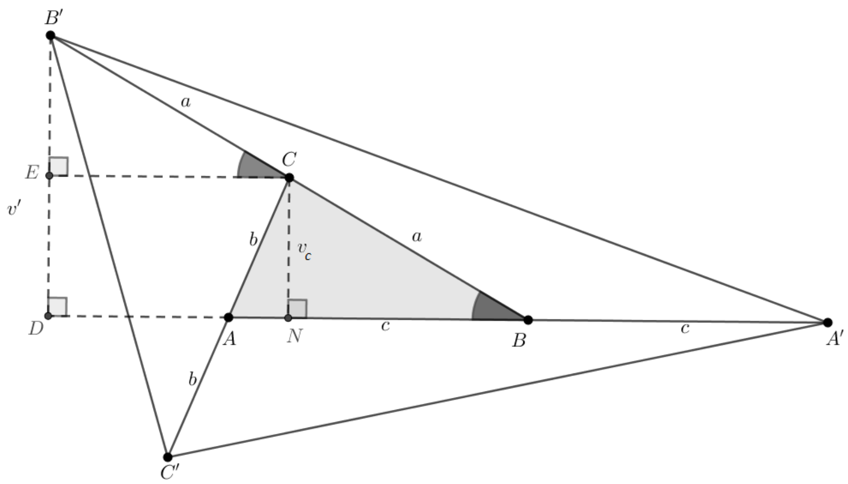
Površina trokuta $A'B'C'$ može se izračunati kao zbroj površina trokuta ABC, $BA'B'$, $CB'C'$ i $A'AC'$, odnosno vrijedi

$$P_{A'B'C'} = P_{ABC} + P_{BA'B'} + P_{CB'C'} + P_{A'AC'} = 7P_{ABC}.$$

Prema tome, površina trokuta $A'B'C'$ je 7 puta veća od površine trokuta ABC. 1 bod

Drugo rješenje.

Skica:



1 bod

Neka je točka N nožište visine trokuta ABC iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$, a točka D nožište visine trokuta $BA'B'$ iz vrha B' na pravac AB. Nacrtamo dužinu $\overline{CE}$ paralelnu s DN tako da dobijemo pravokutnik $DNCE$.

Trokuti NBC i ECB' su sukladni pravokutni trokuti po poučku KSK 1 bod

jer vrijedi $|BC| = |CB'|$ 1 bod

i imaju dva para sukladnih kutova (pravi kutovi kod vrhova N i E te kutovi s usporednim kracima $\sphericalangle CBA$ i $\sphericalangle B'CE$). 1 bod

Iz sukladnosti tih trokuta slijedi $|CN| = |B'E| = v_c$.

Četverokut $DNCE$ je pravokutnik pa je $|CN| = |ED| = v_c$.

Iz toga slijedi da je $|B'E| = |ED| = v_c$, pa je $|B'D| = 2|CN| = 2v_c$. 1 bod

Površina trokuta ABC jednaka je

$$P_{ABC} = \frac{|AB| \cdot |CN|}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2},$$ 1 bod

a površina trokuta $BA'B'$ je

$$P_{BA'B'} = \frac{|BA'| \cdot |B'D|}{2} = \frac{c \cdot 2v_c}{2} = 2P_{ABC}$$

1 bod

Na isti se način može pokazati da je $P_{CB'C'} = 2P_{ABC}$ i $P_{A'AC'} = 2P_{ABC}$. 2 boda

Površina trokuta $A'B'C'$ može se izračunati kao zbroj površina trokuta ABC, $BA'B'$, $CB'C'$ i $A'AC'$, odnosno vrijedi

$$P_{A'B'C'} = P_{ABC} + P_{BA'B'} + P_{CB'C'} + P_{A'AC'} = 7P_{ABC}.$$

Prema tome, površina trokuta $A'B'C'$ je 7 puta veća od površine trokuta ABC. 1 bod

Zadatak OŠ-7.5.

U tablicu s 3 retka i n stupaca treba upisati brojeve na sljedeći način:

- u svakome od triju redaka moraju biti napisani svi prirodni brojevi od 1 do n,
- zbroj brojeva u svakome stupcu mora biti jednak.

a) Pokaži da n ne može biti 10.
b) Odredi broj takvih rasporeda ako je $n = 5$.

Rješenje.

a) Za $n = 10$ tablica bi imala 3 retka i 10 stupaca.

Ako bi u svakom retku bilo napisano prvih 10 prirodnih brojeva, zbroj svih brojeva u tablici bi bio jednak $3 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) = 3 \cdot 55 = 165$.

Ako bi u svakom stupcu zbroj brojeva bio isti, onda bi zbroj u jednom stupcu trebao biti $165 : 10 = 16.5$. 1 bod

To nije moguće jer je zbroj tri prirodna broja prirodan broj. 1 bod

b) Neka je $n = 5$. Jedan raspored koji zadovoljava uvjete iz zadatka je prikazan u sljedećoj tablici.

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	3	1	4	2

1 bod

Želimo pokazati da bilo kojom zamjenom poretka redaka i stupaca dobivamo drugačiji željeni raspored. Promjenom poretka redaka dobivamo ukupno šest različitih rasporeda:

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	3	1	4	2

1	2	3	4	5
5	3	1	4	2
3	4	5	1	2

3	4	5	1	2
1	2	3	4	5
5	3	1	4	2

3	4	5	1	2
5	3	1	4	2
1	2	3	4	5

5	3	1	4	2
1	2	3	4	5
3	4	5	1	2

5	3	1	4	2
3	4	5	1	2
1	2	3	4	5

U svakom od tih rasporeda možemo promijeniti poredak stupaca tako da u prvom retku raspored brojeva bude redom od 1 do 5. Te rasporede zovemo *temeljnima*:

1	2	3	4	5
3	4	5	1	2
5	3	1	4	2

1	2	3	4	5
5	3	1	4	2
3	4	5	1	2

1	2	3	4	5
4	5	1	2	3
4	2	5	3	1

1	2	3	4	5
4	2	5	3	1
4	5	1	2	3

1	2	3	4	5
3	5	2	4	1
5	2	4	1	3

1	2	3	4	5
5	2	4	1	3
3	5	2	4	1

1 bod

Promijenimo li poredak stupaca u bilo kojem od tih rasporeda dobit ćemo novi željeni raspored. Svaka dva rasporeda koja se dobivaju na taj način su različita jer će im ili biti različit prvi redak ili im je prvi redak isti, ali su dobiveni od različitih temeljnih rasporeda. 1 bod

Za svaki od temeljnih šest rasporeda premještanjem stupaca dobijemo

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

različitih rasporeda, pa svih mogućih rasporeda ima $6 \cdot 120 = 720$. 1 bod

Dokažimo da ne postoji nijedan drugi raspored koji zadovoljava uvjete zadatka. Svakom takvom rasporedu možemo promijeniti poredak stupaca tako da je prvi redak tablice popunjen redom brojevima od 1 do 5. Tvrdimo da na taj način moramo dobiti jedan od šest temeljnih rasporeda.

Ako bi u svakom retku bilo napisano prvih pet prirodnih brojeva, zbroj svih brojeva u tablici bi bio jednak $3 \cdot (1+2+3+4+5) = 3 \cdot 15 = 45$. Da bi u svakom stupcu zbroj bio isti, taj zbroj mora biti $45 : 5 = 9$. 1 bod

Taj zbroj se može postići na sljedeće načine:

$$1+3+5,\ 1+4+4,\ 2+2+5,\ 2+3+4 \text{ i } 3+3+3.$$

Mogućnost $3+3+3$ možemo eliminirati jer bismo njome iskoristili sva tri broja 3, a ostatak tablice ne bismo mogli po stupcima ispuniti koristeći samo mogućnosti $1+4+4$ i $2+2+5$. Da bi svaki od brojeva u tablici bio zastupljen točno 3 puta, potrebno je dva puta iskoristiti mogućnost $1+3+5$ i po jednom $1+4+4$, $2+2+5$ i $2+3+4$. Ostale mogućnosti ne postoje. 2 boda

Brojeve 1, 3 i 5 tada možemo upisati u 1., 3. ili 5. stupac. Budući da tu trojku možemo iskoristiti dva puta, možemo ih upisati na tri načina: u 1. i 3. stupac, u 1. i 5. stupac ili u 3. i 5. stupac. Ostale stupce tada možemo popuniti na jedinstven način. Za svaki od ta tri načina zamjenom 2. i 3. retka dobijemo po dva slučaja, što daje točno 6 temeljnih rasporeda. 1 bod