ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

8. razred – osnovna škola

14. ožujka 2025.

Ako učenik ima drugačiji postupak rješavanja zadatka, Povjerenstvo je dužno i taj postupak bodovati i ocijeniti na odgovarajući način.

Zadatak OŠ-8.1.

Odredi vrijednost izraza

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}-\sqrt{x+y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{x+y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{x+y})$$

za $x=0.05$ i $y=5$.

Prvo rješenje.

Množenjem prve i treće zagrade uz primjenu formule za razliku kvadrata dobivamo

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-(\sqrt{x+y})^2,$$ 2 boda

odnosno

$$x+2\sqrt{xy}+y-x-y.$$ 1 bod

Analogno, množenjem druge i četvrte zagrade dobivamo $x-2\sqrt{xy}+y-x-y$. 3 boda

Zadani izraz je zato jednak

$$(x+2\sqrt{xy}+y-x-y)(x-2\sqrt{xy}+y-x-y)=2\sqrt{xy}(-2\sqrt{xy}),$$ 1 bod

odnosno iznosi $-4xy$. 2 boda

Za $x=0.05$ i $y=5$ vrijednost izraza je $-4\cdot 0.05\cdot 5=-1$. 1 bod

Drugo rješenje.

Množenjem prvih dviju zagrada dobivamo

$$\sqrt{x^2}-\sqrt{xy}-\sqrt{x}\sqrt{x+y}+\sqrt{xy}-\sqrt{y^2}-\sqrt{y}\sqrt{x+y}+\sqrt{x}\sqrt{x+y}-\sqrt{y}\sqrt{x+y}-\sqrt{(x+y)^2},$$

a množenjem treće i četvrte zagrade dobivamo

$$\sqrt{x^2}-\sqrt{xy}+\sqrt{x}\sqrt{x+y}+\sqrt{xy}-\sqrt{y^2}+\sqrt{y}\sqrt{x+y}-\sqrt{x}\sqrt{x+y}+\sqrt{y}\sqrt{x+y}-\sqrt{(x+y)^2}.$$ 2 boda

Sređivanjem izraza dobivamo:

$$(x-y-2\sqrt{xy+y^2}-(x+y))\cdot(x-y+2\sqrt{xy+y^2}-(x+y)),$$ 2 boda

odnosno

$$(-2y-2\sqrt{xy+y^2})\cdot(-2y+2\sqrt{xy+y^2}).$$ 1 bod

Množenjem tih dvaju algebarskih izraza dobivamo:

$$\begin{aligned} &= (-2y)^2 - (2\sqrt{xy + y^2})^2 && \text{2 boda} \\ &= 4y^2 - 4xy - 4y^2 && \text{1 bod} \\ &= -4xy && \text{1 bod} \end{aligned}$$

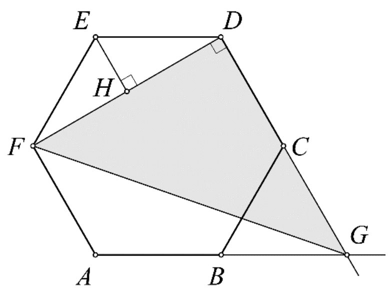
Za $x = 0.05$ i $y = 5$ vrijednost izraza je $-4 \cdot 0.05 \cdot 5 = -1$. 1 bod

Zadatak OŠ-8.2.

Duljina stranice pravilnoga šesterokuta $ABCDEF$ jest 8. Izračunaj površinu trokuta DFG ako je točka G sjecište pravaca AB i CD.

Prvo rješenje.

Skica:



Veličina unutarnjeg kuta pravilnog šesterokuta iznosi $120°$. 1 bod

Trokut DEF je jednakokračan, pa je $|\sphericalangle DFE| = |\sphericalangle EDF| = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$. 1 bod

Trokut DFG je pravokutan jer je

$$|\sphericalangle FDC| = |\sphericalangle EDC| - |\sphericalangle EDF| = 120° - 30° = 90°.$$

1 bod

Kutovi $\sphericalangle GBC$ i $\sphericalangle BCG$ vanjski su kutovi pravilnog šesterokuta, tj. $|\sphericalangle GBC| = |\sphericalangle BCG| = 180° - 120° = 60°$, pa je trokut BGC jednakostraničan. 2 boda

Stoga je $|DG| = |DC| + |CG| = 16$. 1 bod

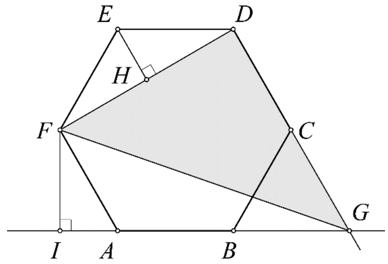
Visina $\overline{EH}$ dijeli trokut DEF na dva sukladna trokuta koji predstavljaju polovicu jednakostraničnog trokuta stranice duljine 8, pa je duljina dužine $\overline{DF}$ jednaka dvostrukoj duljini visine tog jednakostraničnog trokuta, tj.

$|DF| = 2 \cdot |DH| = 2 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$. 2 boda

Površina trokuta DFG je $\frac{|DG| \cdot |DF|}{2} = \frac{16 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 64\sqrt{3}$. 2 boda

Drugo rješenje.

Skica:



Veličina unutarnjeg kuta pravilnog šesterokuta iznosi $120°$. 1 bod

Kutovi $\sphericalangle GBC$ i $\sphericalangle BCG$ vanjski su kutovi pravilnog šesterokuta tj. $|\sphericalangle GBC| = |\sphericalangle BCG| = 180° - 120° = 60°$ pa je trokut BGC jednakostraničan. 2 boda

Površinu trokuta DFG ćemo izračunati tako da od površine peterokuta $AGDEF$, koja je jednaka zbroju površina pravilnog šesterokuta $ABCDEF$ i jednakostraničnog trokuta BGC, oduzmemo zbroj površina trokuta DEF i AGF, tj.

$P_{DFG} = P_{ABCDEF} + P_{BGC} - P_{DEF} - P_{AGF} = 6 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} + \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 112\sqrt{3} - P_{DEF} - P_{AGF}$. 1 bod

Trokut DEF je jednakokračan, pa je $|\sphericalangle DFE| = |\sphericalangle EDF| = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$. 1 bod

Visina $\overline{EH}$ dijeli trokut DEF na dva sukladna trokuta koji predstavljaju polovicu jednakostraničnog trokuta stranice duljine 8, pa je $P_{DEF} = 16\sqrt{3}$. 2 boda

Dužina $\overline{FI}$ visina je trokuta AGF povučena iz vrha F.

Kako je $|FI|$ duljina visine jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine 8 ona iznosi $\frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$. 1 bod

Površina trokuta AGF je $\frac{|AG| \cdot |FI|}{2} = \frac{(|AB| + |BG|) \cdot |FI|}{2} = \frac{(8+8) \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$. 1 bod

Površina trokuta DFG je $112\sqrt{3} - 16\sqrt{3} - 32\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$. 1 bod

Napomena: Ako učenik površinu trokuta DFG računa tako da od površine peterokuta $IGDEF$ oduzme zbroj površina trokuta DEF i IGF, slijediti bodovnu shemu navedenu u drugom rješenju.

Zadatak OŠ-8.3.

Svako od polja tablice 3×3 treba obojiti u crvenu, bijelu ili plavu boju te u svako polje treba upisati jedan od brojeva 1, 2 ili 3. Na koliko je različitih načina to moguće učiniti tako da u svakome stupcu i svakome retku polja budu obojena s tri različite boje i u njih budu upisana tri različita broja?

Rješenje.

Uočimo da je broj načina na koji možemo obojiti tablicu jednak broju načina na koji možemo upisati brojeve. 1 bod

Odredimo broj načina na koje možemo rasporediti brojeve 1, 2 i 3 u tablicu prema uvjetu zadatka.

U prvom retku tablice brojeve možemo rasporediti na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ različitih načina. 2 boda

Sljedeći redak tablice možemo popuniti na dva različita načina jer odabrani broj u prvom stupcu drugog retka ne smije biti isti kao broj u prvom retku i prvom stupcu, a izbor preostala dva broja u drugom retku je jednoznačno određen. 2 boda

1	2	3
2		

1	2	3
3		

Posljednji redak tablice time je jednoznačno određen. 1 bod

Ukupan broj mogućih rasporeda brojeva u tablici je $6 \cdot 2 = 12$. 1 bod

Sveukupan broj rasporeda boja i brojeva u tablici jednak je umnošku broja različitih rasporeda boja i broja različitih rasporeda brojeva. 2 boda

Broj različitih načina popunjavanja tablice uz zadane uvjete je $12 \cdot 12 = 144$. 1 bod

Napomena: Ukoliko učenik sustavno ispiše svih 12 rasporeda brojeva (boja) i time utvrdi da ih ne postoji više, za taj dio zadatka ostvaruje 6 bodova . To može sustavno napraviti na više načina, prikazat ćemo jedan mogući.

Najprije ispišimo sve dopuštene rasporede s brojem 1 u prvom retku i prvom stupcu,

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	3	2
2	1	3
3	2	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

potom ispišimo sve dopuštene rasporede s brojem 2 u prvom retku i prvom stupcu,

2	1	3
1	3	2
3	2	1

2	1	3
3	2	1
1	3	2

2	3	1
1	2	3
3	1	2

2	3	1
3	1	2
1	2	3

a na kraju ispišimo sve dopuštene rasporede s brojem 3 u prvom retku i prvom stupcu.

3	1	2
1	2	3
2	3	1

3	1	2
2	3	1
1	2	3

3	2	1
1	3	2
2	1	3

3	2	1
2	1	3
1	3	2

Ukoliko učenik nesustavno ispiše svih 12 rasporeda brojeva (boja) i ni na koji način ne objasni zašto ih nema više od 12, ostvaruje 4 boda od mogućih 6 bodova za taj dio zadatka.

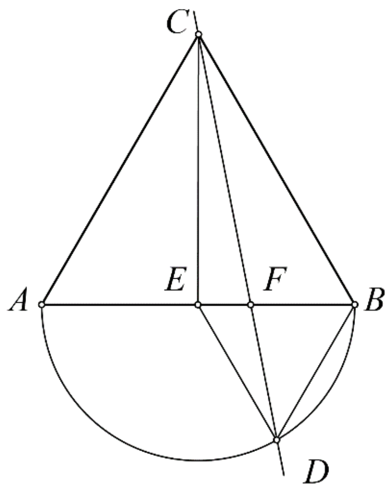
Zadatak OŠ-8.4.

Duljina stranice jednakostraničnog trokuta ABC jest 18. Nad stranicom $\overline{AB}$ izvan trokuta konstruirana je polukružnica. Točka D pripada polukružnici i dijeli je u omjeru 2 : 1. Izračunaj udaljenost točke C i sjecišta pravca DC sa stranicom $\overline{AB}$.

Prvo rješenje.

Neka je točka E polovište stranice $\overline{AB}$ tj. središte polukružnice koja je nacrtana nad stranicom $\overline{AB}$, izvan trokuta, a točka F sjecište pravca CD i stranice $\overline{AB}$.

Skica:



1 bod

Uočimo da je $|EB| = |ED| = 9$. 1 bod

Točka D dijeli kružnicu u omjeru 2:1 pa je $|\sphericalangle DEB| = 60°$. 1 bod

Zaključujemo da je trokut EDB jednakostraničan. S obzirom da su kutovi $\sphericalangle CFA$ i $\sphericalangle DFB$ vršni kutovi i $|\sphericalangle FAC| = |\sphericalangle FBD| = 60°$ prema KK poučku o sličnosti trokuta zaključujemo je $\triangle AFC \sim \triangle BFD$. 1 bod

Stoga je $\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AC|}{|BD|} = \frac{18}{9} = 2$. 2 boda

Vrijedi $|AB| = |AF| + |FB| = 3|FB|$, iz čega zaključujemo $18 = 3|FB|$, tj. $|FB| = 6$.

Slijedi $|EF| = |EB| - |FB| = 9 - 6 = 3$. 1 bod

Trokut EFC je pravokutan trokut kojemu su katete duljina $|EF|$ i $|CE|$.

Dužina $\overline{CE}$ je visina jednakostraničnog trokuta ABC pa je $|CE| = \frac{18\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$. 1 bod

Prema Pitagorinom poučku za pravokutni trokut EFC imamo:

$|CF|^2 = |EF|^2 + |CE|^2$ 1 bod

$|CF| = \sqrt{3^2 + (9\sqrt{3})^2} = \sqrt{252} = 6\sqrt{7}$. 1 bod

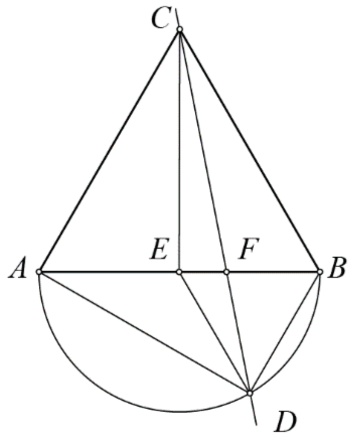
Udaljenost točke C i sjecišta pravca DC sa stranicom $\overline{AB}$ je $6\sqrt{7}$.

Napomena: Ako je učenik umjesto sličnosti trokuta AFC i BFD koristio sličnost trokuta EDF i BCF te dobio $\frac{|BF|}{|EF|} = \frac{18}{9} = 2$, $|BE| = |BF| + |EF| = 3|EF|, 9 = 3|EF|$ tj. $|EF| = 3$ treba ostvariti 3 boda kako je navedeno u bodovnoj shemi.

Drugo rješenje.

Kao u prvom rješenju dokazujemo $\triangle AFC \sim \triangle BFD$. 4 boda

Iz $\triangle AFC \sim \triangle BFD$ zaključujemo da je $\frac{|CF|}{|DF|} = \frac{18}{9} = 2$. 2 boda



Vrijedi:

$|CF| = |CD| - |DF|$

$|CF| = |CD| - \frac{1}{2}|CF|$

$|CF| = \frac{2}{3}|CD|$ 1 bod

Trokut ADB je pravokutni trokut s pravim kutom u vrhu D, jer je obodni kut nad promjerom kružnice pravi, pa prema Pitagorinom poučku imamo:

$|AD|^2 = |AB|^2 - |BD|^2$

$|AD| = \sqrt{18^2 - 9^2} = 9\sqrt{3}$. 1 bod

Trokut ADC je pravokutni trokut jer je $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle DAE| + |\sphericalangle EAC| = 30° + 60° = 90°$ pa prema Pitagorinom poučku imamo:

$|CD|^2 = |AD|^2 + |AC|^2$

$|CD| = \sqrt{18^2 + (9\sqrt{3})^2} = 9\sqrt{7}$. 1 bod

Iz $|CF| = \frac{2}{3}|CD|$ slijedi $|CF| = 6\sqrt{7}$. 1 bod

Udaljenost točke C i sjecišta pravca DC sa stranicom $\overline{AB}$ je $6\sqrt{7}$.

Zadatak OŠ-8.5.

Može li zbroj prvih n prirodnih brojeva biti jednak zbroju kvadrata triju uzastopnih prirodnih brojeva?

Rješenje.

Zbroj prvih n prirodnih brojeva je $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$. 2 boda

Zbroj kvadrata triju uzastopnih prirodnih brojeva, za $m \in \mathbb{N}$ i $m \geqslant 2$ zapisujemo

$$(m-1)^2 + m^2 + (m+1)^2 = m^2 - 2m + 1 + m^2 + m^2 + 2m + 1 = 3m^2 + 2.$$ 2 boda

Kako prirodni broj $3m^2 + 2$ pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2, razmotrimo slučajeve mogućih ostataka broja $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ pri dijeljenju s 3.

1. Ako je $n = 3k$, za $k \in \mathbb{N}$, onda je $\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{3k\cdot(3k+1)}{2}$ prirodan broj koji pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0. 1 bod
2. Ako je $n = 3k+1$, $k \in \mathbb{N}_0$, onda je $\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{(3k+1)\cdot(3k+2)}{2} = \frac{9k^2+9k+2}{2} = 3\cdot\frac{3k\cdot(k+1)}{2}+1$ prirodan broj koji pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1. 2 boda
3. Ako je $n = 3k+2$, $k \in \mathbb{N}_0$, onda je $\frac{n\cdot(n+1)}{2} = \frac{(3k+2)\cdot(3k+3)}{2} = \frac{9k^2+12k+6}{2} = 3\cdot\frac{3k^2+4k+2}{2}$ prirodan broj koji pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0. 2 boda

Ostatak pri dijeljenju zbroja prvih n prirodnih brojeva s 3 može biti samo 0 ili 1 čime smo pokazali da zbroj bilo kojih prvih n prirodnih brojeva ne može biti jednak zbroju kvadrata triju uzastopnih prirodnih brojeva. 1 bod

Napomena: Zbroj kvadrata triju uzastopnih prirodnih brojeva možemo, za neki prirodni broj m, zapisati i ovako:

$$\begin{aligned} & m^2 + (m+1)^2 + (m+2)^2 \\ & = m^2 + m^2 + 2m + 1 + m^2 + 4m + 4 \\ & = 3m^2 + 6m + 5 && \text{1 bod} \\ & = 3(m^2 + 2m + 1) + 2 && \text{1 bod} \end{aligned}$$

Daljnji postupak se nastavlja na prethodno opisani način.